



RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

A la fin de cette matière, le stagiaire doit être capable d'appliquer les notions de la théorie des graphes.

LEÇON N°01 : INTRODUCTION A LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

LEÇON N°02 : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES GRAPHS

LEÇON N°03 : PROGRAMMATION LINEAIRE : LA METHODE DU SIMPLEXE

LEÇON N°04 : RECHERCHE D'UN CHEMIN DE LONGUEUR MINIMALE ET DE LONGUEUR MAXIMALE DANS UN GRAPHE VALUE METHODE DE FORD

LEÇON N°05 : PROBLEME D'ORDONNANCEMENT : METHODE PERT

LEÇON N° 06 : LE CHOIX D'INVESTISSEMENTS

LEÇON N°01 : INTRODUCTION A LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE : À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable de :

- 1- Définir la recherche opérationnelle
- 2- Définir un programme linéaire
- 3- Résoudre graphiquement un programme linéaire à 2 inconnues

PLAN DE LA LEÇON:

I- LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

- 1- Préceptes de la recherche opérationnelle
- 2- Démarche

II- LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

- 1- Introduction générale
- 2- Qu'est ce qu'un programme linéaire
- 3- Résolution par la méthode graphique d'un programme linéaire

CONCLUSION

EXERCICES CORRIGÉS

I- LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :

1- Préceptes de la recherche opérationnelle :

- Réfléchir avant d'agir ;
- Ne pas se fier au bon sens. Appuyez ses décisions sur des bases rationnelles ;
- Tirer le meilleur parti des moyens dont on dispose dans des circonstances données.

Ces préceptes qui pouvaient être ceux du parfait manager, sont ceux de la recherche opérationnelle.

La RO consiste en l'application de méthodes scientifiques pour élaborer des décisions et chercher à résoudre ainsi des problèmes complexes se rencontrant dans la direction et la gestion de grands systèmes d'hommes, de machines, de matériaux et d'argent dans l'industrie, le commerce, l'administration et la défense. La R.O propose une véritable démarche scientifique pour les aborder.

- Chercher à comprendre et à structurer un système complexe en construisant un « modèle » ;
 - Utiliser cette compréhension et ce modèle pour prédire et améliorer les performances du système
- discipline carrefour, la recherche opérationnelle utilise pour arriver à ses fins des techniques propres à d'autres disciplines scientifiques: Mathématiques, Statistiques, Economique, Informatique.

2- Démarche:

Un premier exemple issu d'un grand domaine d'application de la RO, la logistique, va nous servir à illustrer cette démarche.

Une entreprise doit livrer chaque matin quatre clients à partir d'un dépôt central. Un livreur à bord d'un camion se rend donc dans les magasins des clients pour décharger ses marchandises avant de retourner à son point de dépôt.

L'entreprise dans un 1^{er} temps, cherche à organiser la tournée du livreur. Plus celle-ci est courte, non seulement plus vite elle permet au livreur de participer à d'autres tâches, mais surtout plus elle sera économique pour l'entreprise.

Dans ce cas, tout le système, représenté, par le livreur, les clients, l'entreprise et son environnement, doit être pris en compte.

Après appréciation du coût de voyage entre deux (02) clients, exprimé en temps ou en unités monétaires, le critère choisi a été unique: tournée dont la somme des coûts des liaisons empruntées est la plus petite possible.

L'incertitude de certaines données pourraient être prise en compte, le temps de liaison entre 2 clients peut fluctuer suivant les heures de la journée, seule une valeur probable peut être connue. D'autres contraintes peuvent exister. Que se passe-t-il si le volume de marchandises à livrer aux clients excède la capacité du camion? Si certains clients ne sont présents que

pendant une certaine période de la matinée? Tout ceci montre que la construction d'un modèle est délicate. Le problème posé est: Dans quel ordre le camion doit-il visiter les clients pour accomplir une tournée de coût total minimal (le plus petit possible)? Les tournées possibles sont au nombre de 24 : (1 2 3 4, 1 2 4 3, 1 3 2 4, 1 3 4 2, 2 1 3 4, 2 1 4 3,), quelle est donc celle qui fournit le circuit le moins coûteux. En énumérant ces 24 solutions et en calculant le coût total des liaisons à assurer, la tournée cherchée sera nécessairement trouvée. En calculant à la main, plus on moins maladroitement, cela prendra 5 minutes.

Passons maintenant à un ordre de grandeur supérieure, plus proche que la réalité: Vingt cinq clients, par exemple, chiffre encore assez faible par rapport à une clientèle donnée réelle. Les tournées possibles sont au nombre de $25! = 25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1$, plus question de calcul manuel, alors peut être un ordinateur? Mais pas d'illusions, même un ordinateur calculant assez rapidement prendrait un temps équivalent à plusieurs siècles pour trouver la meilleure tournée entre les 25 clients. Ceci est surprenant et montre qu'il faut parcourir à un modèle mathématique (exprimant le problème) et ensuite le résoudre.

L'élaboration d'un modèle consiste en la définition de variables de décision, associées ici par exemple au choix ou nom d'une liaison à emprunter entre 2 clients, la définition des contraintes (passer par chaque client une et une seule fois) et de l'objectif représenté par un but à optimiser (coût minimal) et ceci en fonction de ces variables.

Une fois le problème ainsi posé ; commence l'étude de la conception et de la mise en œuvre informatique d'une méthode de résolution. Ce problème de tournée est appelé problème du voyageur de commerce, il a acquis sa renommée pour plusieurs raisons qui ont éclairé d'autres aspects de la R.O.

II- LA PROGRAMMATION LINÉAIRE :

1- Introduction générale à la programmation linéaire :

Établir un schéma de fabrication qui utilise de manière optimale un stock de matière première limité, transporter des denrées de différents entrepôts vers différents magasins au meilleur coût possible, tout en satisfaisant la demande des magasins et respectant la disponibilité de chaque entrepôt : Voilà quelques exemples classiques de problèmes économiques pour lesquels il importe de disposer de modèles mathématiques à la fois simples, puissants et informatisables (en égard au nombre considérable de données à traiter). On parle traditionnellement à leur sujet de programmation mathématique sans que le mot « programmation » ne fasse en quelque manière que ce soit, référence à l'aspect informatique : il s'agit dans chaque cas d'établir un schéma ou « programme » de fabrication, de transport, optimisant une fonction économique (fonction bénéfice, fonction coût) dans laquelle les variables sont soumises à des contraintes (limitation de stock de matière premières) respect de l'offre et de la demande ...).

Nous ferons lors de la modélisation, une hypothèse simplificatrice supplémentaire: « tout est linéaire », la fonction économique et les contraintes. Cette réduction sévère couvre toutefois une gamme importante d'applications pratiques et constitue le prix à payer pour obtenir le modèle simple et puissant recherché: La programmation linéaire.

2- Qu'est ce qu'un programme linéaire ?

Pour illustrer cette définition commençons par un exemple.

2.1- Un premier exemple-type: Maximisation d'un bénéfice: Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 à l'aide de 3 matières premières M_1 , M_2 et M_3 dont on dispose en quantités limitées. Sous tous les cieux, et tous les régimes se pose le problème de l'utilisation optimale de ce stock de matières premières, c'est à dire la détermination d'un schéma (programme) de fabrication tel que:

- Les contraintes de ressources en matières premières sont respectées ;
- Le bénéfice réalisé par la vente de la production est maximum.

Modèle mathématique:

a- Données numériques des contraintes :

- La disponibilité en matières premières :

18 unités de M_1
8 unités de M_2

- Les caractéristiques techniques de la fabrication sont données dans le tableau ci-après ; y figurent les quantités de matières premières nécessaires à la fabrication d'une unité de chaque produit P_i .

	M_1	M_2	M_3
P_1	1	1	2
P_2	3	1	1

b- Hypothèses de linéarité du modèle :

(L₁) Linéarité des contraintes: On suppose que la fabrication est à rendement constant ; c'est à dire, d'après le tableau ci-dessus pour fabriquer x_1 unités de (P_1) il faut x_1 unités de M_1 , x_1 unités de M_2 et $2 \times x_1$ unités de M_3 , de même, la fabrication de x_2 unités du produit P_2 , nécessite $3 \times x_2$ de M_1 , x_2 unités de M_2 et x_2 unités de M_3 .

(L₂) Linéarité de la fonction économique: On suppose que le bénéfice peut être exprimé à l'aide des bénéfices unitaires c_1 et c_2 sous la forme $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

c_1 est le bénéfice unitaire.

C'est à dire : bénéfice réalisé par la fabrication d'une unité du produit P_1 , le bénéfice réalisé par la fabrication de x_1 unités du produit P_1 est alors $c_1 \times x_1$. De même que pour le produit P_2 , le bénéfice réalisé par la fabrication de x_1 unités de P_1 et x_2 unités de P_2 est $Z = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2$ ce qu'on a appelé fonction économique.

c- Réalisabilité d'un schéma de production :

Un schéma de production est un couple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ désignant les

quantités de P_1 et P_2 fabriquées, il doit évidemment vérifier les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Un tel schéma est-il réalisable? A-t-on suffisamment de matières premières pour assurer une telle production? Le niveau de fabrication nécessite $x_1 + 3x_2$ unités de M_1 , $x_1 + x_2$ unités de M_2 , $2x_1 + x_2$ unités de M_3 .

Les disponibilités en matières premières montrent que le schéma

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ n'est réalisable que lorsque x_1 et x_2 vérifient

Les inéquations :

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

d- Le problème à résoudre est :

Trouver deux nombres x_1, x_2 tels que:

$$1- x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

Soit les matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$C = (c_1, c_2)$ le problème s'écrit matriciellement sous la forme:

Trouver $X \geq 0$ tel que $AX \leq B$ et CX maximum ; ce que nous noterons

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ AX \leq b \\ CX = z \text{ (max)} \end{cases}$$

2.2 - Un deuxième exemple-type: Minimisation d'un coût: Dans une raffinerie, la distillation de deux types de pétroles bruts B_1 et B_2 fournit 3 qualités d'essences E_1, E_2 et E_3 .

La raffinerie doit approvisionner un distributeur d'essences ; le problème consiste à déterminer le meilleur schéma de distillation, c'est-à-dire les quantités de bruts à distiller telles que :

1- Les quantités d'essences obtenues satisfont la demande ;

2- Le coût des quantités de bruts est minimum.

Modèle mathématique:

a- Données numériques de contraintes :

- La demande du distributeur est : 500 litres de E_1 , 400 litres de E_2 et 600 litres de E_3 ;

- La distillation de B_1 et B_2 fournit respectivement :

B_1 : 10% de E_1 , 10% de E_2 , et 30% de E_3 .

B_2 : 50% de E_1 , 20% de E_2 , et 20% de E_3 .

b- Hypothèses de linéarité du modèle :

(L_1) **linéarité des contraintes** : On suppose que la qualité des bruts est toujours la même, et que la distillation s'opère à rendement constant.

Exemple 1 :

La distillation d'un m^3 de B_1 produit 0,1 m^3 de E_1 , 0,1 m^3 de E_2 , et 0,3 m^3 de E_3 .

La distillation de $x_1 m^3$ de B_1 produit alors 0,1 $\times x_1 m^3$ de E_1 et alors 0,1 $x_1 m^3$ de E_2 et 0,3 $x_1 m^3$ de E_3 .

(L_2) **Linéarité de la fonction économique** : Les coûts des bruts sont de 20 \$ / m^3 pour B_1 et de 25 \$ / m^3 pour B_2 ;

On suppose une fois de plus qu'il n'y a pas de tarif dégressif.

c- Réalisabilité d'un schéma de distillation :

Un schéma de distillation est un couple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ désignant les quantités x_2

(en m^3) de B_1 et B_2 distillés; il doit évidemment vérifier les contraintes $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$; un tel schéma est réalisable lorsqu'il permet de satisfaire la demande du distributeur. Pour cela x_1 et x_2 doivent vérifier :

$$0,1 x_1 + 0,5 x_2 \geq 0,5$$

$$0,1 x_1 + 0,2 x_2 \geq 0,4$$

Remarques:

1- Attention aux unités ! La demande du distributeur indiquée plus haut est exprimée en litres, les quantités de bruts sont en m^3 ;

2- Pour trouver les inéquations précédentes ; complétons, l'exemple précédent : La distillation de $x_2 m^3$ de B^2 produit 0,5 $x_2 m^3$ de E_1 , 0,2 $x_2 m^3$ de E_2 , 0,2 $x_2 m^3$ de E_3 . Donc la distillation de $x_1 m^3$ de B_1 et de $x_2 m^3$ de B^3 produit $(0,1 x_1 + 0,5 x_2) m^3$ de E_1 et $(0,1 x_1$

+ $0,2 x_2$) m³ de E_2 , et $(0,3 x_1 + 0,2 x_2)$ de E_3 . Ces quantités doivent être supérieures ou égales à la demande.

d- Le problème à résoudre est :

(P)

Trouver deux nombres x_1 et x_2 tels que:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$0,1 x_1 + 0,5 x_2 \geq 0,5$$

$$0,1 x_1 + 0,2 x_2 \geq 0,4$$

$$0,3 x_1 + 0,2 x_2 \geq 0,6$$

$Z = 20 x_1 + 25 x_2$ est le plus petit possible

(Z représente le coût total des bruts distillés)

Matriciellement ce problème s'écrit :

Trouver $X \geq 0$ tel que $A X \geq B$ et $C X$ minimum avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}; C = [20, 25]$$

Ce que nous noterons :

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ A X \geq B \\ C X \geq Z \text{ (min)} \end{cases}$$

e- Changement d'unités: Formellement, d'un point de vue strictement mathématique, le problème (P) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

(P')

Trouver 2 nombres x_1 et x_2 tels que

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 5 x_2 \geq 5$$

$$x_1 + 2 x_2 \geq 4$$

3- Résolution par la méthode graphique:

Soit le modèle du 1^{er} exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ C_1x_1 + C_2x_2 = Z \text{ (max)} \end{cases}$$

Soit : $C_1 = 3$ et $C_2 = 2$;

Résoudre graphiquement ce modèle revient à trouver les valeurs de x_1 et x_2 qui vérifient le système d'inéquations et donne la plus grande valeur à la fonction économique Z .

On construit d'abord les droites d'équations respectives.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 18 \\ x_1 + x_2 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Et éliminer, pour chacune de ces droites, le demi-plan dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'inéquation correspondante.

Rappel: Toute droite D d'équation $ax + by + c = 0$

L'expression $ax + by + c$ est strictement positive dans l'un et négative dans l'autre, des deux demi-plans de frontière D ; que la droite d'unité partage le plan en 3 parties :

Les points appartenant à la droite et ayant des coordonnées vérifiant $ax + by + c = 0$.

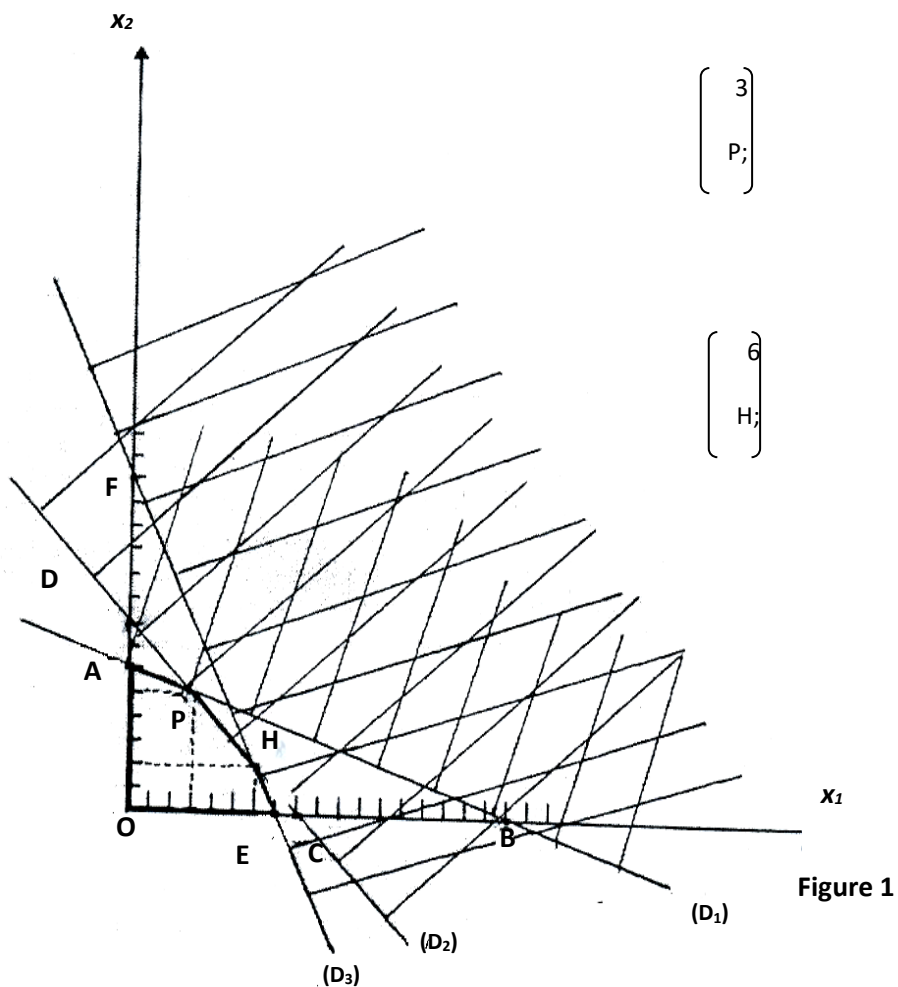
Les 2 demi-plans délimités par (D) et dans lesquels, l'expression $ax + by + c$ garde un signe constant (nous l'admettrons sans démonstration).

Pratiquement, on trace les droites et on utilise les coordonnées de l'origine $(0, 0)$ pour chacune des inéquations afin de vérifier que le signe de la région contenant ladite origine convient ou non au sens de l'inéquation. On hachure ensuite la partie qui ne convient pas comme ci-dessous indiqué:

$$D_1: x_1 + 3x_2 = 18 \quad \text{passe par } A \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} x_1 = 18 \\ x_2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2: x_1 + x_2 = 8 \quad \text{passe par C} \quad \begin{bmatrix} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{bmatrix} \quad D \quad \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{bmatrix}$$

$$D_3: 2x_1 + x_2 = 14 \quad \text{passe par E} \quad \begin{bmatrix} x_1 = 7 \\ x_2 = 0 \end{bmatrix} \quad F \quad \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 14 \end{bmatrix}$$



(OAPHE) contient

Toutes les solutions possibles (réalisables)

Les coordonnées des points intérieurs et sur les côtés vérifient les contraintes, il faut donc chercher celui qui donne le bénéfice le plus élevé.

Pour le savoir, on remplacera dans la fonction économique.

$Z = 3 x_1 + 2 x_2$ les coordonnées de chacun des points du domaine des solutions réalisables, on obtient alors :

$$Z_O = 3 (0) + 2 (0) = 0$$

$$Z_A = 3 (0) + 2 (6) = 12$$

$$Z_P = 3 (3) + 2 (5) = 19$$

$$Z_H = 3 (6) + 2 (2) = 22$$

*

$$Z_E = 3 (7) + 2 (0) = 21$$

L'optimum est atteint au point H avec :

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 2$$

Un autres exemple: Soit le modèle (P'), comme il est à 2 inconnues, on peut facilement le résoudre par la méthode graphique.

On construit d'abord les droites d'équations respectives :

$$x_1 + 5 x_2 = 5$$

$$x_1 + 2 x_2 = 4$$

$$3 x_1 + 2 x_2 = 6$$

Et éliminer pour chacune de ces droites, le demi-plan dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'inéquation correspondante.

$$D_1 = x_1 + 5 x_2 = 5 \quad \text{passe par les points} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = x_1 + 2 x_2 = 4 \quad \text{passe par les points} \quad C \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = 3 x_1 + 2 x_2 = 6 \quad \text{passe par les points} \quad E \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

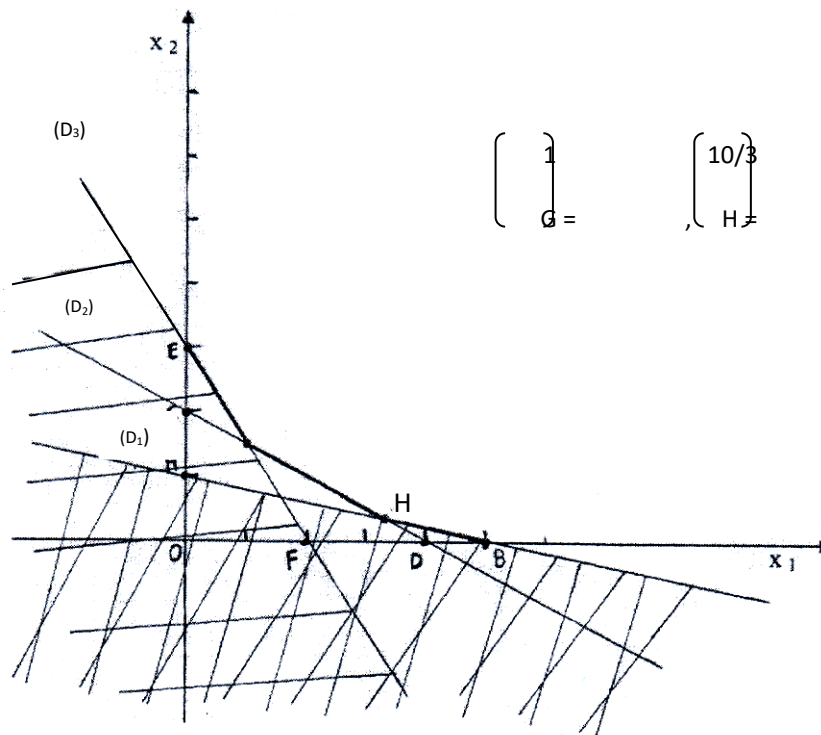


Figure 2

Remarque: Comme dans l'exemple précédent, après avoir tracé les droites, on utilise les coordonnées de l'origine (0,0) pour chacune des inéquations afin de vérifier le signe de la région contenant ladite origine convient ou non au sens de l'inéquation, on hachure ensuite la partie qui ne convient pas soit la première inéquation : $x_1 + 5x_2 \geq 5$, le point d'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas cette inéquation car $0 + 5(0) \geq 5$ n'est pas vérifiée, on hachure alors la région qui contient ce point, dans la figure précédente la partie non hachurée représente le domaine des solutions possibles (réalisables).

Quel est le point qui minimise le coût total des bruts distillés ? pour répondre à cette question, on remplace dans la fonction économique : $20x_1 + 25x_2$ les coordonnées de chacun des points : E, G, H, B

$$Z_E = 20(0) + 25(3) = 75 \$$$

$$Z_G = 20(1) + 25(3/2) = 115/2 = 57,5 \$$$

*

$$Z_H = 20(10/3) + 25(1/3) = 225/3 = 75 \$$$

$$Z_B = 20(5) + 25(0) = 100 \$$$

Le minimum est atteint au point $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3/2 \end{array}$$

Remarque: Comment calculer un point d'intersection entre deux droites ? Il suffit de résoudre le système d'équations constitué des équations des 2 droites. Prenons l'exemple de la figure 2.

Le point d'intersection H entre les deux droites (D_2) et (D_1) : le calcul des coordonnées du point H consiste à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + 5 x_2 = 5 \\ x_1 + 2 x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$$

CONCLUSION:

Nous avons appris à modéliser un problème de maximisation ou de minimisation et de le résoudre par la méthode graphique, modéliser un problème consiste à l'exprimer par un modèle mathématique qu'on appellera, dans la leçon suivante, un programme linéaire. La résolution par la méthode graphique n'est facile que si le modèle contient au plus deux inconnues.

Dans la leçon suivante on introduira une méthode de résolution quand le modèle est à plus que deux inconnues.

EXERCICES CORRIGÉS :

EXERCICE N° 1:

Résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants

$$\begin{array}{lcl}
 (P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. & (P_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. & (P_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = -x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{array} \right.
 \end{array}$$

EXERCICE N° 2 :

Un laboratoire pharmaceutique doit élaborer un fortifiant à l'aide de 3 produits P_1 , P_2 , P_3 , des normes en vigueur imposent au fortifiant une teneur minimal en vitamines V_1 et V_2 , plus précisément 8 unités de V_1 et 12 unités de V_2 . Les teneurs en vitamines de chacun des produits sont :

	P_1	P_2	P_3
V_1	3	1	8
V_2	4	2	9

Les coûts unitaires de chacun des produits sont : $C_1 = 24$, $C_2 = 10$, $C_3 = 72$. Evidemment, le laboratoire cherche à fabriquer son fortifiant au coût minimal, tout en respectant les normes.

Exprimer ce problème sous forme d'un programme linéaire.

NB: Il n'est pas demandé de résoudre le programme linéaire.

EXERCICE N° 3:

Soit deux produits P_1 , P_2 fabriqués sur deux machines M_1 , M_2 la production d'une unité de P_1 exige 4 heures machines sur M_1 et 2 heures machines sur M_2 , La production d'une unité de P_2 exige 8 heures machines sur M_1 et 2 heures machines sur M_2 .

	M_1	M_2	Profit unitaire
P_1	4	2	4
P_2	8	2	6
Disponibilités des M_i	84	24	

1- Modéliser mathématiquement ce problème sous forme d'un programme linéaire noté (P) sachant que l'objectif est de maximiser le profit.

2- Résoudre (P) par la méthode gra

SOLUTION DES EXERCICES:

EXERCICE N° 1:

Résolution de (P₁):

On commence par tracer les droites d'équations respectives :

$$D_1 : x_1 + 2 x_2 = 4 \quad \text{passe par les points} \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 : 2 x_1 + x_2 = 4 \quad \text{passe par les points} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D =$$

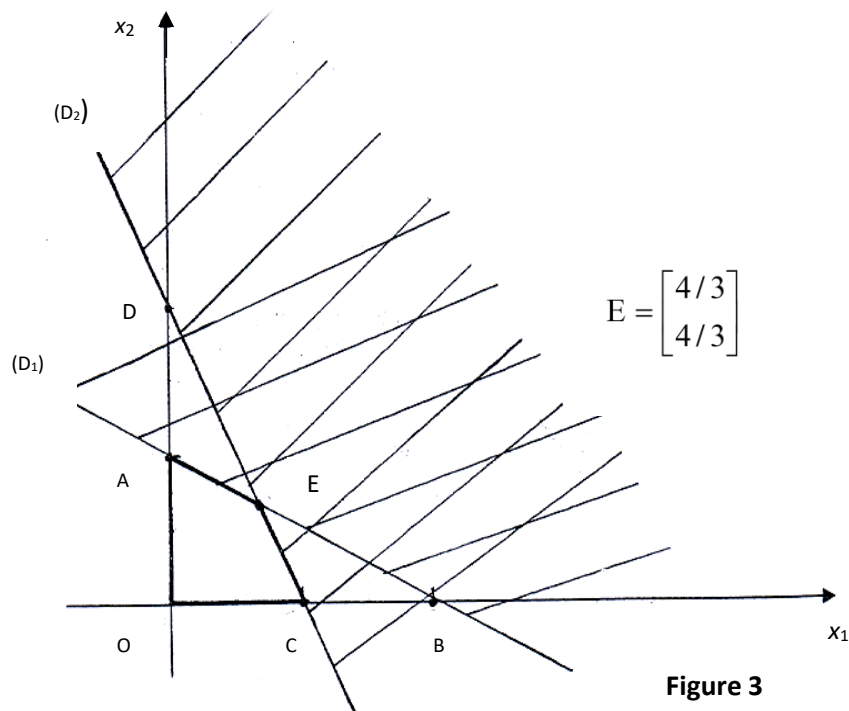


Figure 3

Pour chacune des droites tracées, on hachure la partie du plan dont les points ne vérifient pas l'inéquation correspondante (OAE) décrit le domaine des solutions réalisables, on l'appelle aussi le domaine d'acceptabilité.

On compare les points O, A, C et E, on remplace leurs coordonnées dans la fonction économique.

$$Z_O = 2(0) + 3(0) = 0$$

$$Z_A = 2(0) + 3(2) = 6$$

$$Z_C = 2(2) + 3(0) = 4$$

$$Z_E = 2\left(\frac{4}{3}\right) + 3\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

*

La meilleure solution est atteinte au point $E = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$$x_1 = 4/3$$

$$x_2 = 4/3$$

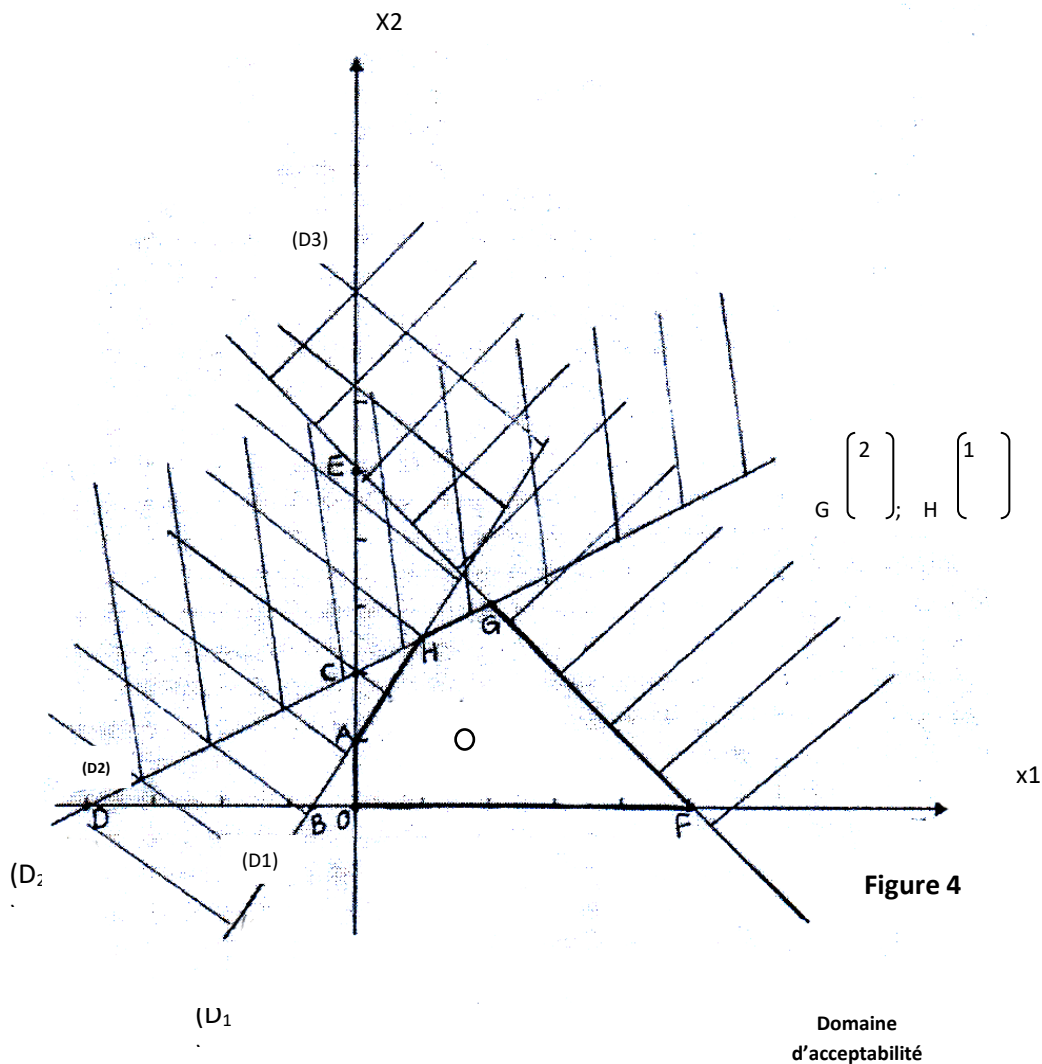
$$Z = 20/3$$

Résolution de (P_2) :

La droite $D_1 : -3x_1 + 2x_2 = 2$ passe par les points $A : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B : \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

La droite $D_2 : -x_1 + 2x_2 = 4$ passe par les points $C : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D : \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

La droite $D_3 : x_1 + x_2 = 5$ passe par les points $E : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F : \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$Z_O = 0 + 2 (0) = 0$$

$$Z_A = 0 + 2 (1) = 2$$

$$Z_F = 5 + 2 (0) = 5$$

$$Z_G = 2 + 2 (3) = 8$$

*

$$Z_H = 1 + 2 \cdot 5/2 = 6$$

L'optimum est atteint au point $G = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$x_1 = 2$$

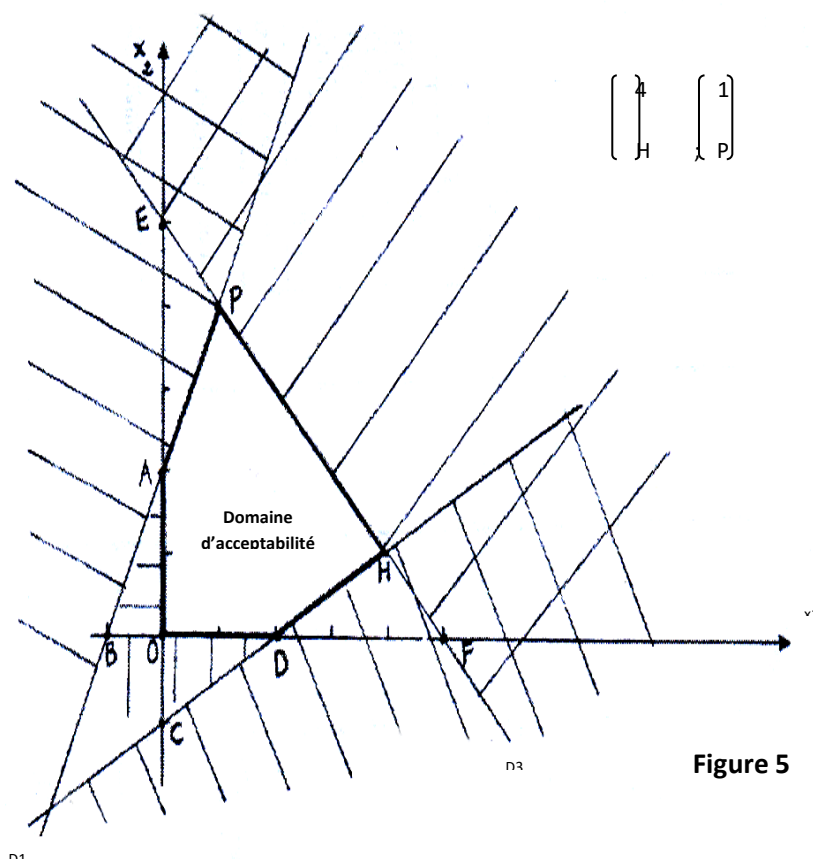
$$x_2 = 3$$

Résolution de (P₃):

$D_1 = -2x_1 + x_2 = 2$ passe par les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_2 = x_1 - 2x_2 = 2$ passe par les points $C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_3 = x_1 + x_2 = 5$ passe par les points $E \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



(OAPHD) est le domaine des solutions réalisables.

- La valeur minimale de la fonction économique est atteinte au point :

$$Z_O = 0 + 0 = 0$$

$$Z_A = 0 + 2 = 0$$

$$Z_G = -1 + 4 = 3$$

$$Z_H = -4 + 1 = -3$$

*

$$Z_D = -2 + 0 = -2$$

La solution optimale se trouve en H :

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 1$$

EXERCICE N° 2 :

Soient x_1 , x_2 , x_3 les nombres d'unités utilisées des produits P_1 , P_2 et P_3 respectivement : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

- Chaque unité de P_1 contient 3 unités de la vitamine V_1 , x_1 unités de V_1 contiennent $3x_1$ unités de la vitamine V_1 ;

- Chaque unité de P_2 contient 1 unité de la vitamine V_1 , x_2 unités de P_2 contiennent x_2 unités de la vitamine V_1 ;

- Chaque unité de P_3 contient 8 unités de V_1 , x_3 unités de P_3 contiennent $8x_3$ unités de V_1 .

Les normes en vigueur imposent au fortifiant une teneur minimale de 8 unités de V_1 , c'est-à-dire : le fortifiant doit contenir 8 unités de V_1 ou plus ; soit :

$$3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 8$$

De même, le fortifiant doit contenir au moins 12 unités de la vitamine V_2 , D'après les teneurs des 3 produits en V_2 , on a :

$$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 12$$

La fonction économique à minimiser est $24x_1 + 10x_2 + 72x_3$, le programme linéaire associé à ce problème est :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 ; & x_2 \geq 0 ; & x_3 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 12 \\ 24x_1 + 10x_2 + 72x_3 = Z(\min) \end{cases}$$

EXERCICE N° 3:

1- Modéliser le problème consiste à exprimer les contraintes (sur les heures de disponibilité des machines) et la fonction économique (qui est le profit à maximiser) en fonction des inconnues x_1 , x_2 nombres d'unités de P_1 , P_2 à produire respectivement.

- Si on décide de produire x_1 unités de P_1 , et x_2 unités de P_2 , on a besoin de $4x_1 + 8x_2$ heures machines sur M_1 , et $2x_1 + 2x_2$ heures machine sur M_2 .

- Comme le temps de disponibilité des machines est limité : 84 heures sur M_1 et 24 heures sur M_2 , on a les contraintes suivantes :

$$4x_1 + 8x_2 \leq 84$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 24$$

- Le profit réalisé est : $4x_1 + 6x_2$ qui est la fonction économique à maximiser :

$$\text{Alors: } \begin{cases} x_1 \geq 0 ; & x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 84 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 = Z \text{ (max)} \end{cases}$$

Est le programme linéaire associé à ce problème.

2- Résolution par la méthode graphique :

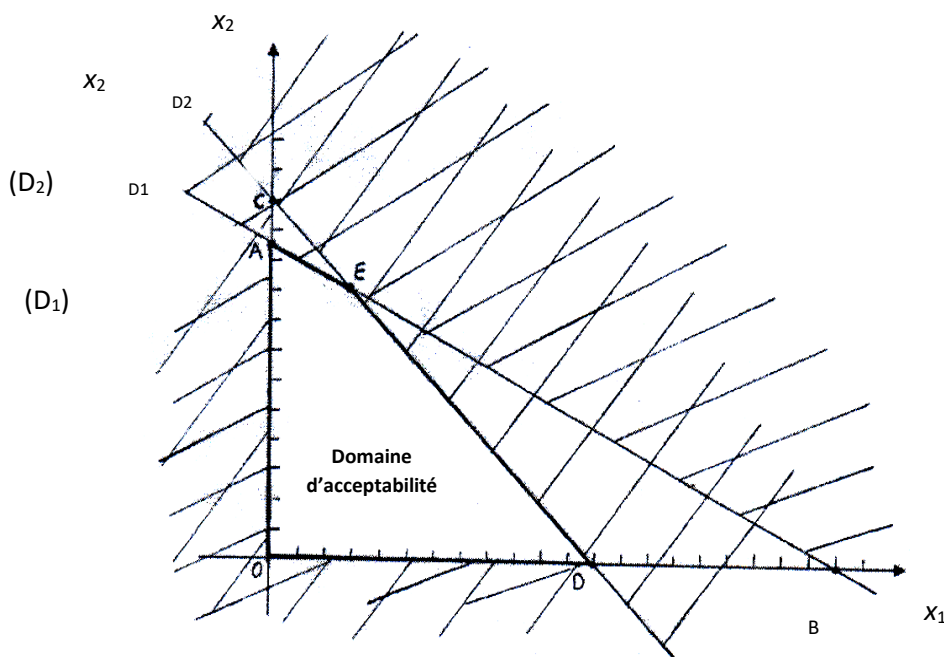


Figure 6

Tracés des droites :

$D_1 : 4x_1 + 8x_2 = 84$ passe par les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ 10,5 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_2 : 2x_1 + 2x_2 = 24$ passe par les points $C \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcul de la meilleure solution :

$$Z_O = 4(0) + 6(0) = 0$$

$$Z_A = 4(0) + 6(10,5) = 63$$

$Z_E = 4(3) + 6(9) = 66$

*

$$Z_D = 4(12) + 6(0) = 48$$

$x_1 = 3 ; \quad x_2 = 9$

L'optimum est donc atteint au point E :

$Z = 66$

LEÇON N°02 : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES GRAPHS

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE : À LA fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable de définir un graphe, un chemin, et un circuit, et de déterminer les niveaux de génération dans un graphe sans circuit.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I- QU'EST-CE QU'UN GRAPHE ?

- 1- Définition
- 2- Exemple

II - VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES GRAPHS

III - CONCEPTS NON- ORIENTÉS

IV - RECHERCHE DE NIVEAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT

- 1- Définition de niveau de génération
- 2- Méthode de détermination des niveaux de chaque sommet à partir d'un exemple

V- CONCLUSION

EXERCICES CORRIGÉS

INTRODUCTION :

On regroupe généralement sous le titre de théorie des graphes des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristiques communes de pouvoir être visualisés : des points représentant des individus, des objets, des situations.....; sont joints par des flèches ou des lignes symbolisant les relations existants entre eux. Jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, la théorie des graphes s'est développée en liaison avec des problèmes de physique et chimie, mais aussi dans le cadre de récréations mathématiques (jeux). Ce n'est qu'après 1945 qu'on vit apparaître des applications dans le domaine de la gestion, classées avec beaucoup d'autres, sous le titre général de problème de recherche opérationnelle.

À la fin de ce cours le stagiaire doit être capable de définir un graphe, un chemin, et un circuit, et de déterminer les niveaux de génération dans un graphe sans circuit.

I - QU'EST-CE QU'UN GRAPHE ?

Il convient de distinguer les graphes orientés de ceux qui ne le sont pas. Nous nous intéressons ici aux premiers et nous donnerons par la suite quelques exemples des seconds.

1- Définition :

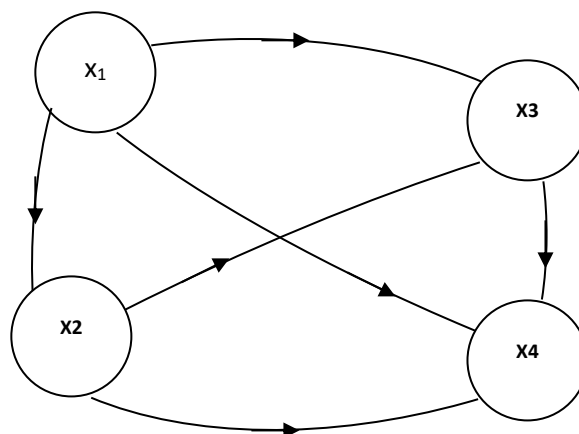
Les graphes orientés que nous traiterons dans cette leçon peuvent être considérés comme des schémas représentant simplement la structure d'un problème. Ils sont généralement déterminés par la donnée de :

a- Un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'éléments appelés **sommets** du graphe ; Si X possède n éléments distincts, le graphe sera dit d'ordre n .

b- Un ensemble fini $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, dont les éléments sont des couples ordonnés de sommets appelés **arcs**.

U est donc une famille d'éléments du produit cartésien $X \bullet X = \{(x, y)/x \in X, Y \in X\}$.

Exemple : Le graphe $G(x, u)$ suivant, présente les résultats d'un tournoi d'échecs = les sommets x_1, x_2, x_3, x_4 représentent les 4 concurrents, et l'existence d'un arc (x_i, x_j) ou plus exactement la présence dans U de l'arc (x_i, x_j) indique que le joueur x_i a remporté la partie unique l'opposant au joueur x_j .



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4)\}$$

II- VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES GRAPHES :

Voici, quelques définitions de base relatives aux arcs et aux sommets d'un graphe $G (X,U)$.

1- Extrémités d'un arc :

Un arc $u = (x, y)$ possède une extrémité initiale x et une extrémité terminale y .

2- Boucle :

Une boucle est un arc dont les deux extrémités coïncident, elle est de la forme (x, x) .

3- Arcs adjacents (voisins) :

Deux ou plusieurs arcs sont dits adjacents, s'ils ont au moins une extrémité en commun.

Exemple : Dans le graphe précédent les arcs (x_1, x_2) et (x_3, x_2) sont voisins, les arcs (x_1, x_4) , (x_2, x_4) et (x_3, x_4) sont eux aussi voisins ou adjacents.

4- Successeur :

On dit qu'un sommet y est un successeur d'un sommet x , s'il existe un arc ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté $T^+(x)$.

Exemple : Dans le graphe précédent ; x_4 est successeur du sommet x_1 ; x_1 n'est pas successeur de x_2 car il n'existe pas un arc (x_2, x_1) .

5- Prédécesseur :

On dit qu'un sommet y est un prédécesseur du sommet x , s'il existe un arc ayant y comme extrémité initiale et x comme extrémité terminale. L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x est noté $T^-(x)$.

Exemple : Dans le graphe précédent ; x_1 est un prédécesseur du sommet x_2 ; x_1 n'a pas de prédécesseur.

Remarque :

- Si x est prédécesseur de y alors y est successeur de x ;
- Dans quelques ouvrages, vous pouvez trouver que le mot prédécesseur est remplacé par précède.

6- Sommets adjacents (voisins) :

Un sommet x est adjacent au sommet y , s'il est prédécesseur ou successeur de y . Ces sommets peuvent aussi être qualifiés de voisins, on peut aussi dire que deux sommets sont voisins s'il existe un arc qui les relie. On note par $T(x)$ l'ensemble des sommets voisins de x , $T(x) = T^+(x) \cup T^-(x)$.

Exemple : Dans l'exemple précédent :

	X1	X2	X3	X4
T^+	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_4\}$	$\emptyset$
T^-	$\emptyset$	$\{x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
T	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

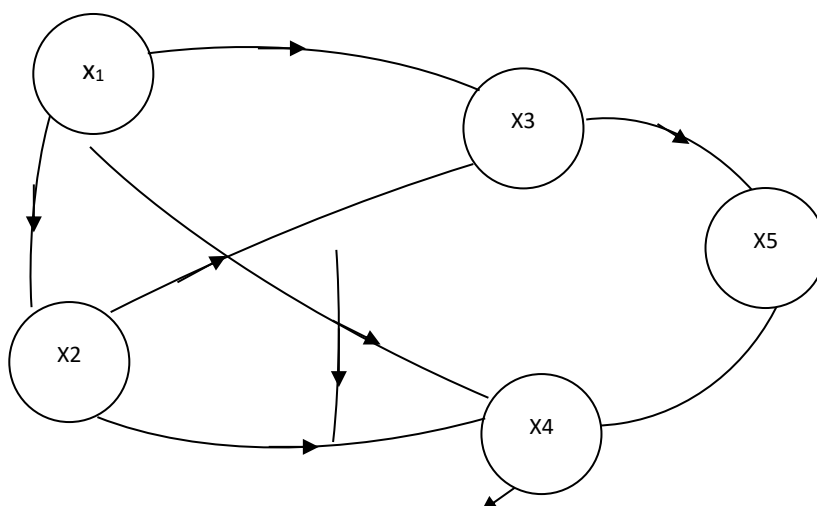
7- Sommet isolé :

Un Sommet isolé est un sommet qui n'a pas de voisins.

8- Chemin :

Un chemin est une suite d'arcs dont l'extrémité terminale de chacun est l'extrémité initiale du suivant, sauf pour le dernier.

Exemple : Dans le graphe suivant :



(x_1, x_3, x_5, x_4) est un chemin ; (x_1, x_3, x_4, x_2) est un autre chemin.

Le chemin (x_1, x_3, x_5, x_4) est formé des arcs (x_1, x_3) , (x_3, x_5) , (x_5, x_4) .

Le chemin (x_1, x_3, x_4, x_2) est formé des arcs (x_1, x_3) , (x_3, x_4) , (x_4, x_2) .

Un chemin peut donc être défini soit par la suite des sommets qu'il contient, soit par la suite d'arcs qui le composent.

Remarque : Si dans un chemin, l'extrémité initiale du premier arc coïncide avec l'extrémité terminale du dernier arc, on parlera alors de **circuit**.

Exemple : Dans le graphe précédent $(x_1, x_3, x_4, x_2, x_1)$ est un circuit, (x_1, x_4, x_2, x_1) est un circuit.

III - CONCEPTS NON ORIENTÉS :

Si entre deux sommets x, y d'un graphe, il existe un arc (x, y) et un arc (y, x) , il peut intuitivement paraître plus simple de remplacer ces deux arcs par un lien **sans orientation**. Si cette situation se produit pour tous les couples de sommets, il n'y a plus aucune orientation à en considération. On considère alors au lieu de l'arc (x, y) , l'ensemble formé par les points x, y qu'on note $e = (x, y)$ et qu'on appelle **arête**.

Le graphe non orienté est noté $G(X, E)$ où X est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

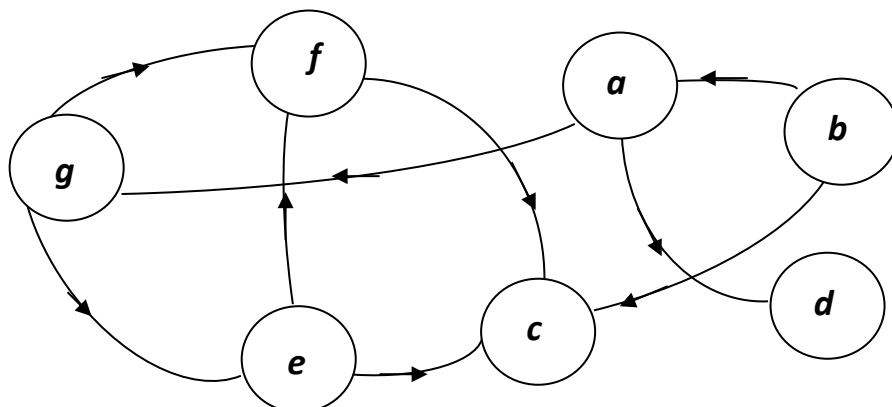
IV- RECHERCHE DE NIVEAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT :

1- Définition de niveau de génération :

Dans un graphe sans circuit, il est possible de numéroter les sommets du graphe de telle sorte que le numéro affecté à chaque sommet soit inférieur à celui des suivants (successeurs) et supérieur à celui des précédents (prédécesseurs) ; ce numéro attribué à chaque sommet est précisément le **niveau de génération** ou **rang** du sommet en question.

Les sommets de niveau 0 sont ceux qui n'ont aucun précédent, ceux de rang 1 sont ceux dont les précédents appartiennent au rang 0. Les sommets de niveau 2 ont des précédents de niveau 0 ou 1 et ainsi de suite.

2- Méthode de détermination des niveaux de chaque sommet à partir d'un exemple : Soit le graphe suivant :



La détermination du niveau de chaque sommet se fait en plusieurs étapes :

Étape N° 1 : On écrit le dictionnaire des précédents dans le tableau suivant :

X	T ⁻ (x)
a	b
b	néant
c	b,e,f
d	a
e	g
f	g,e
g	a

Étape N° 2 : On recherche ensuite dans ce dictionnaire des lignes vides, il se trouve qu'il n'y en a qu'une, en l'occurrence la ligne « b ».

Par conséquent, « b » n'ayant aucun précédent est donc un sommet de niveau 0, ce que l'on note : $N_0 = \{b\}$

On barre ensuite tous les « b » dans les colonnes X et T⁻ (x) d'où le tableau N°1 suivant :

X	T ⁻ (x)
a	néant
c	e,f
d	a
e	g
f	g,e
g	a

On constate que la ligne « a » devient vide donc « a » est de niveau 1 soit : $N_1 = \{a\}$

Étape N° 3 : On barre ensuite tous les « a » dans le tableau N°1, on obtient le tableau N°2 suivant :

X	T ⁻ (x)
c	e,f
d	néant
e	g
F	g,e
g	néant

Les lignes « d » et « g » deviennent vides, d et g sont des sommets de niveau 2, soit :

$N_2 = \{d, g\}$

Étape N° 4 : On barre ensuite tous les « d » et « g » d'où le tableau N° 3, suivant :

X	T ⁻ (x)
c	e,f
e	néant
f	e

La ligne « e » devient vide, à son tour, ce qui signifie que le sommet e est de niveau 3, soit :

$$N_3 = \{e\}$$

Étape N° 5 : On barre tous les « e », d'où le tableau N° 4 suivant :

X	T ⁻ (x)
c	f
f	néant

La nouvelle ligne vide est la ligne « f », donc le sommet f est de rang 4, soit : $N_4 = \{f\}$

Étape N° 6 : On barre ensuite tous les « f », et on obtient le tableau N° 5 ci-dessous :

X	T ⁻ (x)
c	néant

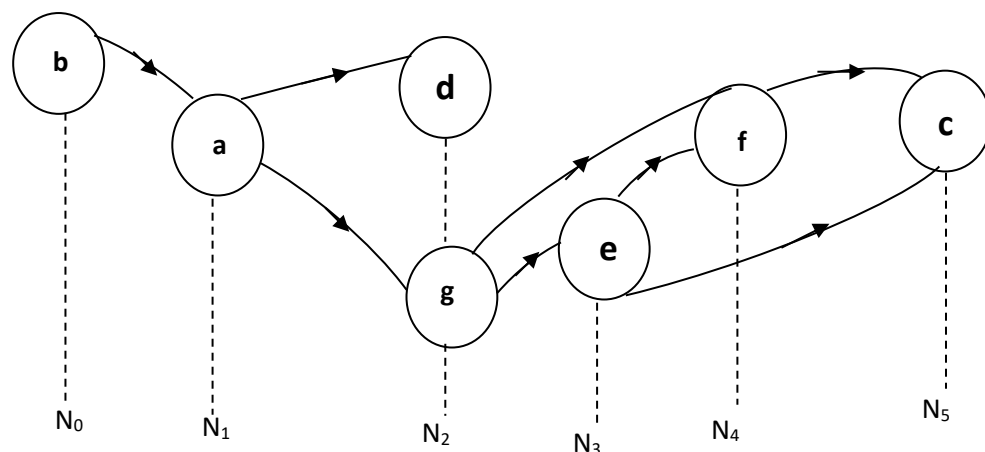
La ligne du sommet c étant vide, le sommet c sera de niveau 5, soit enfin :

$$N_5 = \{c\}$$

En résumé, les différents niveaux sont :

$$\begin{array}{ll} N_0 = \{b\} & N_3 = \{e\} \\ N_1 = \{a\} & N_4 = \{f\} \\ N_2 = \{d, g\} & N_5 = \{c\} \end{array}$$

Cette détermination des niveaux du graphe, va nous permettre de représenter le graphe précédant par un graphe plus lisible et plus facile à exploiter, car ordonné par niveau de génération.



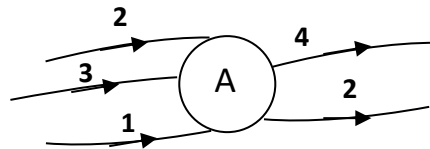
Ce graphe est identique au premier, sauf que la connaissance des niveaux de chaque sommet a fait que sa représentation soit plus lisible que celle du 1^{er} graphe.

V- CONCLUSION : UTILITÉ DU CONCEPT DE GRAPHE EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :

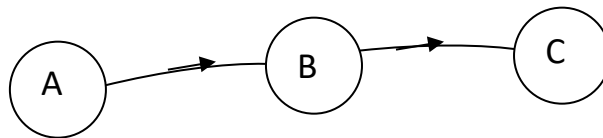
Un graphe peut représenter toutes sortes de situations dans les phénomènes d'organisation. Par exemple, un réseau (c'est-à-dire un graphe comportant une entrée et une sortie) peut correspondre à des canalisations où circule un fluide (liquide ou gaz).

Dans ce cas là, les quantités entrantes (par exemple par unité de temps) en un sommet doivent être égales aux quantités sortantes (par unité de temps) en ce même sommet. Il est facile, en effet, de comprendre que si trois canalisations apportent en un sommet A des débits respectifs de 2, 3 et 1 litres/mn.

Soit en tout 6L/mn⁽¹⁾, les canalisations qui partent de A doivent avoir un débit total de 6L /mn. Mais un graphe n'est pas toujours un réseau représentant des circulations quelconques.



Souvent, une flèche entre deux points, implique seulement une relation de succession par exemple, le graphe suivant peut valoir dire seulement que A précède B qui lui-même précède C.



On dit qu'un graphe est value si, à tout arc qui le constitue, correspond une valeur numérique qu'on écrit seulement sur la figure, à proximité de cet arc. Ces valeurs peuvent être des quantités, des transportées, des débits, des coûts, des durées, etc....

EXERCICES CORRIGÉS :

EXERCICE N° 1 :

Soit le graphe $G = (X, U)$ donné par sa représentation dictionnaire restreinte aux prédécesseurs des sommets (voir tableau 1).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
précédents	-	1, 3	-	1	3	8, 9	2, 5	2, 4, 5	4	7, 8, 9

- Dresser le graphe puis déterminer les niveaux de génération du graphe.

EXERCICE N° 2 :

Soit un ensemble $E = \{0, 2, 6, 18, 9, 11\}$.

On définit dans E la relation par:

$x R y \Leftrightarrow x \in E, y \in E, (x \text{ est multiple de } y) \text{ et } (x \neq y)$.

1- En utilisant les concepts de la théorie des graphes, proposer une représentation de cette relation : définir l'ensemble des sommets X , celui des arcs U et dresser $G = (X, U)$.

2- En utilisant le vocabulaire de la théorie des graphes que représente :

a- Un nombre premier.

b- Le sous-ensemble des éléments de E multiples d'un élément x de E .

c- Le sous-ensemble des éléments de E qui divisent un élément x de E .

d- Le cardinal de E .

3- Donner le dictionnaire des prédécesseurs (précédents) du graphe obtenu.

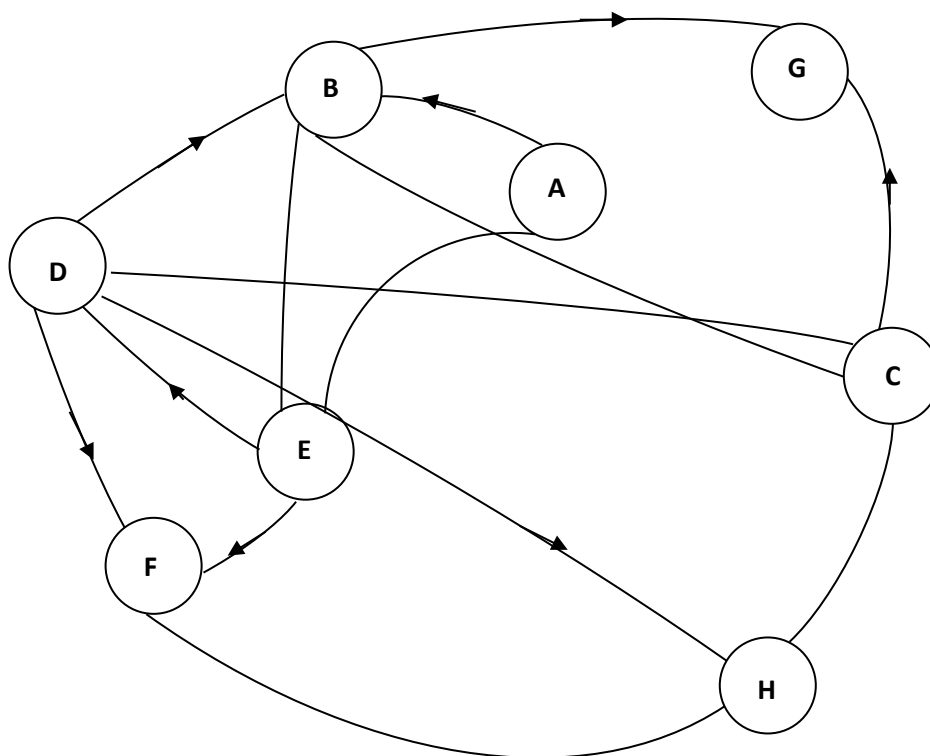
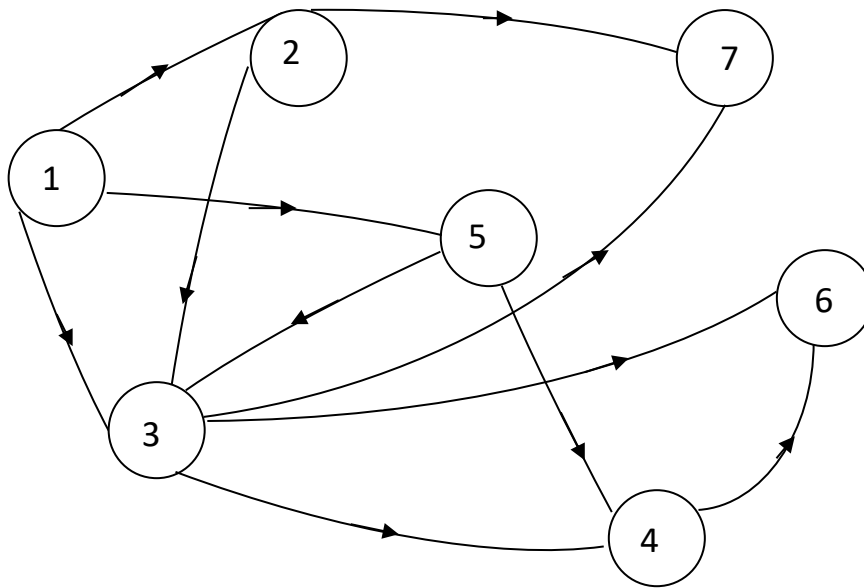
Notes :

- Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui-même : ex : 3, 7, 17, 47, ...

- Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient. Le cardinal de l'ensemble $L = \{0, 3, -5\}$ est 3 ; le cardinal de l'ensemble vide est égal à zéro.

EXERCICE N° 3 :

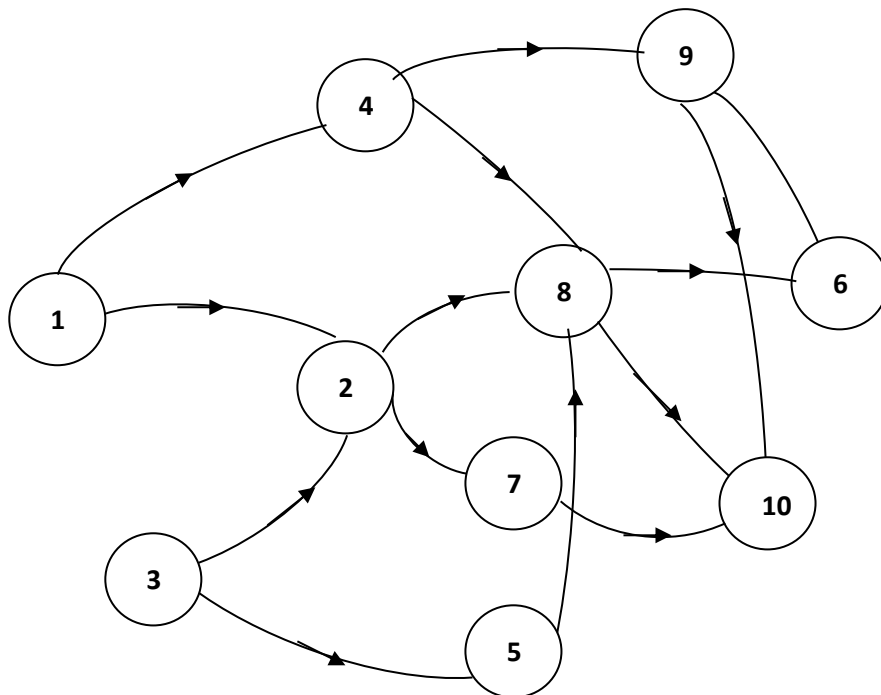
- Donner un ordonnancement par niveau des graphes suivants :



Présenter les graphes sous forme plus lisible, les sommets étant disposés selon leurs niveaux respectifs.

SOLUTION DES EXERCICES :

EXERCICE N° 1 :



Détermination des niveaux de génération :

Étape n° 1 : D'après le dictionnaire des précédents, les sommets 1 et 3 sont de niveau 0, car ils n'ont pas de prédécesseurs, soit $N_0 =$

Étape n° 2 : On supprime les sommets 1 et 3 du tableau, ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

X	précédents
2	/
4	/
5	/
6	8,9
7	2,5
8	2,4,5
9	4
10	7,8,9

Les sommets de niveau 1 sont : $N_1 = \{2,4,5\}$.

Étape n° 3 : En supprimant les sommets de niveau 1 du tableau, on a :

X	P(x)
6	8,9
7	/
8	/
9	/
10	7,8,9

Les sommets de niveau 2, sont $N_2 = \{7,8,9\}$.

Étape n° 4 : Ceci permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
6	/
10	/

Les sommets du dernier niveau (3) sont $N_3 = \{6,10\}$.

On a les niveaux de générations suivants :

$$N_0 = \{1,3\}.$$

$$N_1 = \{2,4,5\}.$$

$$N_2 = \{7,8,9\}.$$

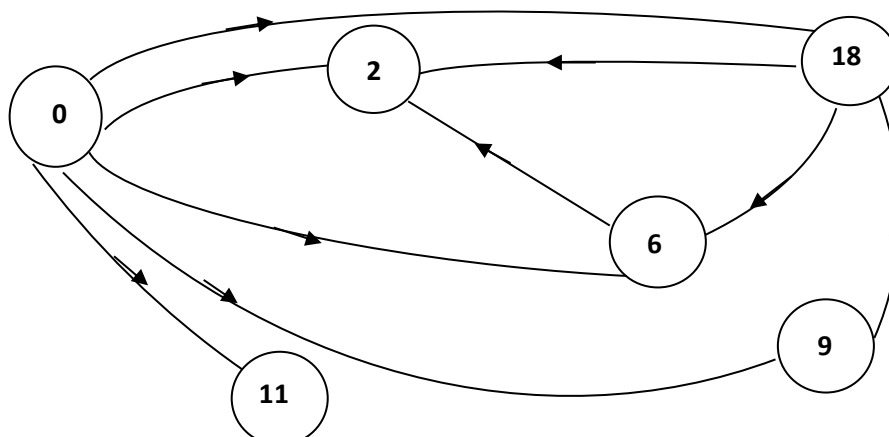
$$N_3 = \{6,10\}.$$

EXERCICE N° 2 :

- 1- La représentation de l'ensemble E ainsi que celle de la relation par un graphe $G = (X, U)$ peut être faite de la manière suivante :

$$X = E$$

$$U = \{(x, y) / x \in X, y \in X, x \text{ est multiple de } y \text{ et } x \neq y\}$$



Ainsi : $X = \{0, 2, 6, 18, 9, 11\}$
 $U = \{(0, 2), (0, 6), (0, 18), (0, 9), (0, 11), (6, 2), (18, 2), (18, 6), (18, 9)\}$

- 2-
- a- Un nombre premier n'a pas de successeurs ;
 - b- Le sous ensemble des éléments de E multiples d'un élément x de E représente l'ensemble des prédécesseurs de x dans le graphe.

Exemples : Les multiples de 2 ; 6 et 18 sont les précédents du sommet dans le graphe.

- c- Le sous ensemble des éléments de E qui divisent un élément x de E représente l'ensemble des successeurs de x.

Exemple : Les diviseurs de 18 sont 2, 6, 9 et ce sont ces successeurs dans le graphe

- d- Le cardinal de E (qui est égale à 6) est l'ordre du graphe.

3-

X	précédents
0	/
2	0, 6, 18
6	0, 18
9	0, 18
18	0
11	0

EXERCICE N° 3 :

Pour le graphe1, présentons le dictionnaire des précédents :

X	P(x)
1	/
2	1
3	1, 2, 5
4	3, 5
5	1
6	3, 4
7	2, 3

Les sommets de niveau 0 sont : $N_0 = \{1\}$, on supprime ce sommet du tableau ce qui donne :

X	P(x)
2	/
3	2, 5
4	3, 5
5	/
6	3, 4
7	2, 3

Les sommets de niveau 1 sont : $N_1 = \{2,5\}$, la suppression des ces sommets, permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
3	/
4	3
6	3,4
7	3

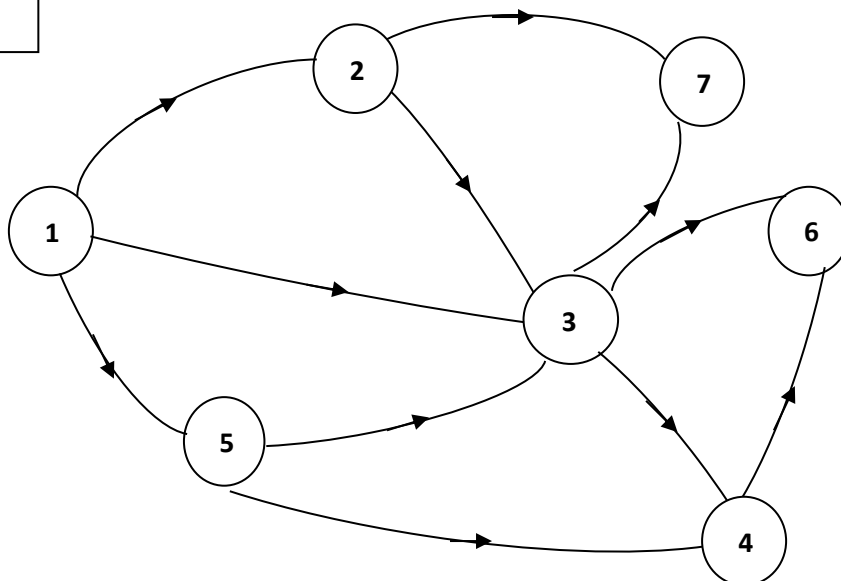
L'ensemble $N_2 = \{3\}$, sa suppression du tableau donne :

X	P(x)
4	/
6	4
7	/

On peut facilement déduire du tableau que $N_3 = \{4,7\}$ et $N_4 = \{6\}$.

Soit :

$N_0 = \{1\}$
$N_1 = \{2,5\}$
$N_2 = \{3\}$



Pour le deuxième graphe, représentons aussi le dictionnaire des précédents :

X	P(x)
A	E
B	A,E,D
C	D,B,H
D	E
E	/
F	E,D
G	A,B ,C
H	F,D

$N_0 = \{E\}$ et le nouveau tableau est le suivant :

X	P(x)
A	/
B	A,,D
C	D,B,H
D	/
F	D
G	A,B ,C
H	F,D

$N_1 = \{A,D\}$ sa suppression du tableau permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
B	/
C	B,H
F	/
G	B ,C
H	F

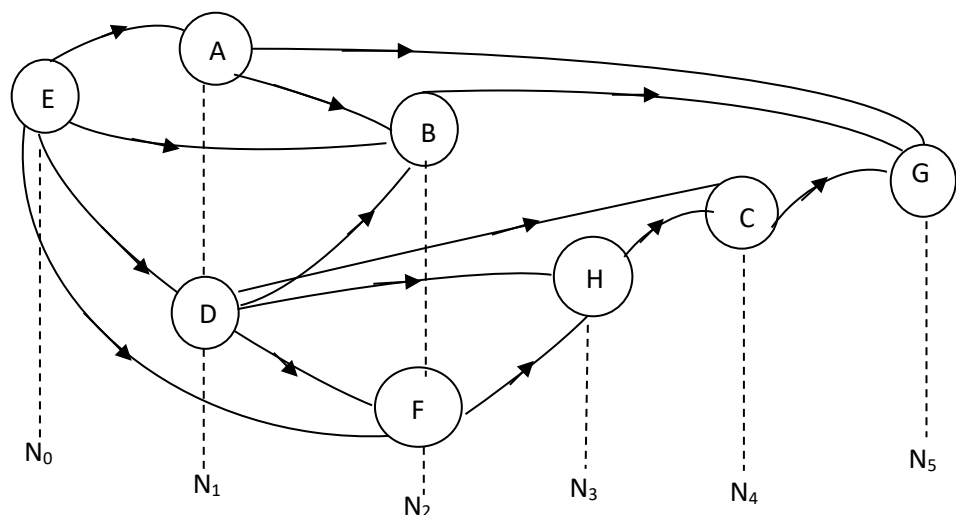
$N_2 = \{B,F\}$, On supprime ces 2 sommets du tableau ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
C	H
G	C
H	/

$N_3 = \{H\}$, $N_4 = \{C\}$ et $N_5 = \{G\}$ peuvent être déduits de la même façon.

L'ordonnancement par niveau de ce graphe est :

$N_0 = \{E\}$
$N_1 = \{A,D\}$
$N_2 = \{B,F\}$
$N_3 = \{H\}$



LEÇON N°03 : PROGRAMMATION LINEAIRE : LA METHODE DU SIMPLEXE

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE : À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable d'écrire un programme linéaire sous forme canonique, sous forme standard et de résoudre un programme de maximisation par la méthode algébrique et la méthode du simplexe.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I - NOTATION GENERALE D'UN PROGRAMME LINÉAIRE

II - FORMES CANONIQUE ET STANDARD D'UN PROGRAMME LINEAIRE

- 1- Notion de forme canonique.
- 2- Forme standard
- 3- Introduction de variables d'écart et de variables artificielles.

III - METHODES DE RESOLUTION DE MAXIMISATION

- 1- Méthode algébrique de substitution
- 2- Présentation pratique (Méthode du simplexe)

CONCLUSION

EXERCICES RESOLUS

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION :

Les problèmes de la programmation linéaire se posent lorsque l'on cherche à rendre optimum (minimum ou maximum) une fonction linéaire¹ de plusieurs variables, ces variables étant assujetties à des contraintes linéaires, c'est-à-dire, du premier degré. Soulignons, à ce propos qu'une contrainte est linéaire, lorsqu'elle s'exprime par une égalité ou inégalité dont le premier membre est une combinaison linéaire ou forme linéaire des variables et le second un nombre réel.

Afin d'étudier le programme linéaire, vous devez avoir des notions sur la résolutions du système d'équation linéaire par la méthode de substitution.

I - NOTATION GENERALE D'UN PROGRAMME LINEAIRE :

Soient les deux programmes linéaires suivants :

1- Trouver $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_i \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Et rendant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_ix_i + \dots + c_nx_n \quad \text{Maximum.}$$

Remarque : On appellera $b_1, b_2, \dots, b_m$, le second membre

2- Trouver $x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; \dots, x_i \geq 0 ; \dots, x_n \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mi}x_i + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

Et rendant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_ix_i + \dots + c_nx_n \quad \text{Minimum}$$

En utilisant les notations matricielles, on peut abréger l'écriture de ces programmes linéaires :

¹ On a appelé cette fonction, la fonction économique.

$$\text{Programme N}^\circ 1 \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \geq 0 \\ AX \leq B \end{cases}$$

$$\text{Programme N}^\circ 2 \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \geq 0 \\ AX \geq B \end{cases}$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \end{bmatrix}$$

Tout programme linéaire est donc formé de 3 grandes parties notamment :

a - D'inconnues appelées «variables non-négatives » :

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ Dans le 1^{er} et le 2^{ème} programme.

b - D'équations ou inéquations au nombre de m : tenant lieu de contraintes et que doivent vérifier les n variables, chacune des équations ou inéquations étant une combinaison linéaire du 1^{er} degré par rapport aux variables non négatives.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 2 \\ x_1 + 6x_2 \leq 0 \end{cases}$$

c -D'une « fonction économique » à maximiser ou à minimiser ;

(Ex : $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_1x_1 + \dots + c_nx_n = Z$) dans laquelle les coefficients C_i peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

De façon générale, la programmation linéaire a pour but la recherche de l'optimum d'une fonction linéaire (fonction économique) comportant plusieurs inconnues positives ou nulles liées, entre elles, par des relations linéaires indépendantes et formant un système d'équations et inéquations appelées contraintes.

II - FORMES CANONIQUE ET STANDARD D'UN PROGRAMME LINEAIRE :

L'objectif de ce paragraphe est de définir les formes d'un programme linéaire, ces dernières seront utiles pour introduire une autre méthode (dite du simplexe) pour la résolution d'un programme linéaire.

1- Notion de forme canonique :

Lorsque l'ensemble de contraintes se présente sous forme d'inégalités ($\leq$, ou $\geq$) ou parle de forme canonique.

Toutefois, il convient de distinguer un programme canonique de type I d'un programme canonique de type II.

a - Un programme canonique de type I : Est un programme dans lequel les contraintes inégalités sont tournées dans le sens « inférieur ou égal », l'objectif recherché étant la maximisation de la fonction économique.

b - Un programme canonique de type II : A des contraintes inégalités tournées dans le sens « supérieur ou égal » l'objectif est un minimum.

Exemples :

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \quad + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 \quad + \quad + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + \quad + 15x_3 \leq 25 \\ \text{Max}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

* Forme canonique de type I

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 \quad - \quad + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Min}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

* Forme canonique de type II

c- Notion de forme mixte : Parfois, les contraintes sont tournées les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, l'objectif pouvant être soit un maximum soit un minimum. Mais on peut également avoir un mélange d'égalité (=) ou d'inégalités ($\geq$ ou $\leq$). Un tel programme est un programme mixte. On dit aussi qu'il se présente sous forme mixte.

Exemples de formes mixtes ou de programmes mixtes :

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 \quad + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Max}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10 \\ x_1 \quad + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Min}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 \quad + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Max}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

2- Forme standard :

Dans un programme écrit sous forme standard, toutes les contraintes représentent des égalités. L'objectif pouvant être le maximum ou le minimum.

Exemples :

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10$ $x_1 + 3x_3 = 7$ $x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25$ Max $(2x_1 + 9x_2 + x_3)$	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10$ $x_1 + 3x_3 = 7$ $x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25$ Min $(2x_1 + 9x_2 + x_3)$
--	--

La forme canonique s'avère plus pratique dans le cadre de la résolution par la méthode graphique. Quant à la forme standard, elle n'apparaît intéressante que dans les méthodes matricielles et plus particulièrement dans la méthode du simplexe que G.B Dantzig développa à partir de 1948, et qui demeure encore la méthode la plus efficace.

Soulignons enfin que dans la méthode du simplexe, tous programmes se présentant sous forme canonique, doit être ramené sous la forme standard avec introduction de variables d'écart ou artificielles selon le cas et selon des règles bien précises, ainsi que nous le verrons par la suite.

3- Introduction de variables d'écart et de variables artificielles (dans la méthode du simplexe) :

Le problème de l'introduction de variables d'écart et de variables artificielles ne peut se poser que lors du passage de la forme canonique à la forme standard et dans le cadre de la méthode du simplexe. Les exemples suivants permettront certainement de cerner tous les aspects du problème. Nous appellerons VR = variables réelles ; VE = variables d'écart ; VA = variables artificielles.

Forme Canonique			Forme Standard Correspondante
N° 1	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \leq 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \leq 550 \end{cases}$ $\text{Max}(150x_1 + 200x_2)$	N° 1	$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0}_{\text{V.E}}$ $\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 + x_3 &= 240 \\ 10x_1 + 25x_2 + x_4 &= 500 \\ 15x_1 + 40x_2 + x_5 &= 550 \end{aligned}$ $\text{Max}(150x_1 + 200x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)$
N° 2	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 20x_2)$	N° 2	$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0}_{\text{V.E}} \quad \underbrace{x_6 \geq 0}_{\text{V.E}}$ V.A $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 + x_2 - x_5 + x_6 &= 4 \end{aligned}$ $\text{Max}(10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6)$
N° 3	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$ $\text{Max}(5x_1 + 10x_2)$	N° 3	$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0}_{\text{V.E}} \quad \underbrace{x_4 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 12 \end{aligned}$ $\text{Max}(5x_1 + 10x_2 + 0x_3 - Mx_4)$
N° 4	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 24 \\ 8x_1 + 2x_2 = 16 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 8x_2)$	N° 4	$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0}_{\text{V.E}} \quad \underbrace{x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 &= 24 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_5 &= 16 \end{aligned}$ $\text{Max}(10x_1 + 8x_2 + 0x_3 - Mx_4 - Mx_5)$
N° 5	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$ $\text{Max}(20x_1 + 15x_2)$	N° 5	$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0}_{\text{V.E}} \quad \underbrace{x_6 \geq 0}_{\text{V.E}}$ V.A

			$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 14 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_6 = 10 \end{cases}$ $\text{Max}(20x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6)$
N° 6	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 50 \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 40 \\ 3x_1 + 15x_2 + 5x_3 = 50 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 20x_2 + 30x_3)$	N° 6	$\underline{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0} \quad \underline{x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0}$ $\begin{matrix} \text{V.R} & & \text{V.A} \end{matrix}$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 50 \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_5 = 40 \\ 3x_1 + 15x_2 + 5x_3 + x_6 = 50 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 20x_2 + 30x_3 - Mx_4 + Mx_5 - Mx_6)$
N° 7	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \end{cases}$ $\text{Min}(3x_1 + 10x_2)$	N° 7	$\underline{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0} \quad \underline{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0} \quad \underline{x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0}$ $\begin{matrix} \text{V.R} & \text{V.E} & \text{V.A} \end{matrix}$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_4 + x_6 = 14 \end{cases}$ $\text{Min}(3x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6)$
N° 8	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \geq 21 \\ 5x_1 + 12x_2 \leq 13 \end{cases}$ $\text{Min}(x_1 + 3x_2)$	N° 8	$\underline{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0} \quad \underline{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0} \quad \underline{x_5 \geq 0}$ $\begin{matrix} \text{V.R} & \text{V.E} & \text{V.A} \end{matrix}$ $\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 - x_3 + x_5 = 21 \\ 5x_1 + 12x_2 + x_4 = 13 \end{cases}$ $\text{Min}(x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5)$
N° 9	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 100 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = -20 \end{cases}$ $\text{Max}(9x_1 + 2x_2 + 4x_3)$	N° 9	$\underline{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0} \quad \underline{x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0} \quad \underline{x_6 \geq 0 \quad x_7 \geq 0}$ $\begin{matrix} \text{V.R} & & \text{V.E} \end{matrix}$ V.A $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_4 + x_6 = 100 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_7 = -20 \end{cases}$ $\text{Max}(9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7)$

N° 10	$x_1 \geq$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 & \geq 10 \\ 3x_1 + 7x_2 & \geq 3 \end{cases}$ $\text{Min } (10x_1 + x_2)$	N° 1 0	$\overbrace{x_1 \geq 0 \ x_2 \geq 0 \ x_3 \geq 0 \ x_4 \geq 0 \ x_5 \geq 0}^{\text{V.R}} \mid \overbrace{x_6 \geq 0 \ x_7 \geq 0 \ x_8 \geq 0}^{\text{V.E}}$ V.A $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & & + x_6 & & = 5 \\ x_1 + 2x_2 & - x_4 & & + x_7 & = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 & & - x_5 & & + x_8 = 3 \end{cases}$ $\text{Min } (10x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8)$

• On voit à travers ces exemples que les variables artificielles interviennent exclusivement dans les contraintes égalités (=) ou inégalités tournées dans le sens « supérieur ou égal à », le second membre étant positif et l'objectif pouvant être le maximum ou le minimum.

• Si l'objectif est un minimum, les variables artificielles sont accompagnées d'un coefficient positif M, dans la fonction économique. Si par contre il s'agit d'une maximisation, les variables artificielles devront être accompagnées dans la fonction économique, d'un coefficient négatif que l'on convient de noter -M avec $M > 0$.

• D'autre part, toutes les contraintes de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq q_1$$

Deviennent des équations dans la forme standard et exigent l'introduction de variables d'écart affectées d'un (+1), que l'objectif soit un minimum ou un maximum. Dans la fonction économique ces variables d'écart seront accompagnées d'un coefficient nul quelque soit l'objectif. Car elles représentent des écarts ou marges ou encore des bénéfices unitaires de productions fictives (dans le cadre de la fabrication par exemple). Soulignons enfin que les contraintes du type ($\leq$) n'exigent que la présence de variables d'écart et jamais de variables artificielles et ceci indépendamment de l'objectif envisagé.

Par contre, les contraintes de la forme : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq q_1$

Requièrent la présence de variables d'écart et de variables artificielles. Les variables d'écart sont affectées d'un (-1) et les variables artificielles d'un (+1) quelque soit l'objectif.

Mais dans la fonction économique on aura un coefficient nul pour la variables d'écart et (-M) pour la variable artificielle si l'objectif est un maximum ; et dans le cas contraire, la variable d'écart sera toujours affectée d'un coefficient nul dans la fonction économique tandis que la variable artificielle est affectée d'un (+M).

Terminons en soulignant que les contraintes de type (=) n'admettent point de variables d'écart mais seulement de variables artificielles affectées du signe correspondant à celui du second membre. Dans la fonction économique, on agit exactement comme dans le cadre des inéquations sus-énoncées.

III - METHODES DE RESOLUTION DE MAXIMISATION :

1- Méthode algébrique de substitution :

1.1- Principe de la méthode :

Étape 1 : Dresser la forme canonique du problème posé.

Étape 2 : Passer de la forme canonique à la forme standard en transformant les inéquations en équations et en introduisant les variables d'écart ou artificielles selon le cas.

Étape 3 : Poser la solution extrême de base en utilisant d'abord les variables réelles comme variables non principales (qu'on appellera variables hors base ou variables nulles).

Les autres variables non nulles obtenues, constituant les variables principales ou variables dans la base. A ce stade la fonction économique est nulle.

Étape 4 : Passer à la 1^{ère} itération (répétition) afin de trouver une solution de base meilleure, c'est-à-dire améliorer la valeur de la fonction économique.

Pour y parvenir on sélectionnera une variable entrante et une variable sortante selon les critères de Dantzig suivants :

a - Critère d'entrée : La variable entrante est une variable hors base qui dans la fonction économique présente le coefficient positif le plus élevé.

b - Critère de sortie : La variable sortante est une variable dans la base, qui correspond au plus petit rapport positif des seconds membres des contraintes aux coefficients de la variable entrante (l'infini et les nombres négatifs étant exclus).

Étape 5 : On arrête les différentes itérations dès que la fonction économique ne contient plus que des coefficients négatifs ou nuls.

Exemple : Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de la méthode de substitution :

$$\begin{array}{l} S_1 \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \leq 104 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 360 \\ \text{Max}(7x_1 + 4x_2) \end{array} \end{array}$$

Le programme linéaire (S_1) est déjà sous forme canonique, pour avoir la forme standard, il s'agit seulement d'ajouter des variables d'écart $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$

S_2

$$\begin{array}{l}
 x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad = 140 \\ x_1 + x_2 \quad \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad = 104 \\ 5x_1 + 3x_2 \quad \quad \quad + x_5 \quad \quad \quad = 360 \end{array} \right. \\
 \text{Max}(7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)
 \end{array}$$

– **Recherche de la solution de base** : En utilisant l'énoncé de l'étape 3 ; la première solution de base (qu'on a appelé solution extrême), les variables réelles (sont appelées hors base ou non principales ou nulles). Ici on a : $x_1 = 0 ; x_2 = 0$

Les autres variables non nulles, sont les variables dans la base ; on déduit leurs valeurs en remplaçant dans (S_2).

De la 1^{ère} équation : $x_3 = 140$

De la 2^{ème} équation : $x_4 = 104$

De la 3^{ème} équation : $x_5 = 360$

A ce stade, la fonction économique est nulle

La solution extrême de base est :

$$\begin{array}{l}
 \text{HB : } x_1 = 0, x_2 = 0 \\
 \text{B } x_3 = 140 \\
 \quad x_4 = 104 \\
 \quad x_5 = 360 \\
 \quad Z = 0
 \end{array}$$

1^{ère} Itération : C'est l'étape 4, le but est de trouver une solution de base meilleure c'est-à-dire améliorer la fonction économique.

Pour choisir la variable entrante ; c'est l'une des variables hors base qui a le coefficient positif le plus grand dans la fonction économique ; dans notre exemple : c'est x_1 .

Si x_1 entre dans la base ; elle ne sera plus nulle, quelle est la valeur à affecter à x_1 :

À partir des équations (S_2) ; on peut obtenir le système (S_3)

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_3 = 140 - 2x_1 - x_2} \quad \text{Équation d'échange} \\ x_4 = 104 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 360 - 5x_1 - 3x_2 \end{array} \right.$$

Or $x_2 = 0$ car elle est hors de la base, d'où :

$$(S_4) \begin{cases} x_3 = 140 - 2x_1 \\ x_4 = 104 - x_1 \\ x_5 = 360 - 5x_1 \end{cases}$$

$$\text{Or} \begin{cases} x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 140 - 2x_1 \geq 0 & \text{soit } x_1 \leq 70 \\ x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 104 - x_1 \geq 0 & \text{soit } x_1 \leq 104 \\ x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 360 - 5x_1 \geq 0 & \text{soit } x_1 \leq 72 \end{cases}$$

Le niveau maximum à affecter à x_1 est : $x_1 = \text{Min}\{70, 104, 72\} = 70$. On affecte donc la valeur 70 à x_1 ; et on cherche la variable sortante. Ce sera celle qui s'annulera après substitution de x_1 par 70.

$$\begin{cases} x_3 = 140 - 2 \cdot 70 = 0 \\ x_4 = 104 - 70 = 34 \\ x_5 = 360 - 5 \cdot 70 = 10 \end{cases}$$

La variable sortante est donc x_3

La nouvelle solution obtenue à partir de cette 1^{ère} itération est :

HB	$x_2 = 0$; $x_3 = 0$
B	$x_1 = 70$
	$x_5 = 10$
	$x_4 = 34$
	$Z = 7 \cdot 70 + 4 \cdot 0 = 490$

2^{ème} Itération : Dans (S_3) l'équation d'échange est celle qui fournit la variable sortante, soit :

$$x_3 = 140 - 2x_1 - x_2$$

Dans cette équation, on exprime la variable entrante à l'aide de variables hors base x_2 et x_3 soit :

$$x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2$$

On remplace ensuite cette nouvelle expression de x_1 dans les différentes équations de (S_3) ce qui donne :

$$\begin{cases} x_4 = 104 - \left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2\right) - x_2 \\ x_5 = 360 - 5\left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2\right) - 3x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 34 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 = 10 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$Z = 7 \left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \right) + 4x_2$$

$$Z = 490 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2$$

On obtient donc le système :

$$(S_5) \begin{cases} x_4 = 34 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ \boxed{x_5 = 10 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2} \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ Z = 490 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \quad \text{Equation d'échange}$$

La variable entrante sera donc x_2 car elle possède le coefficient positif le plus élevé dans la fonction économique.

Niveau à affecter à x_2 (tout en maintenant $x_3 = 0$, car elle reste hors base).

$$(S_6) \begin{cases} x_4 = 34 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 = 10 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_2 \\ Z = 490 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 34 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 68$$

Or

$$x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 70 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 140$$

$x_2 = \text{Min} \{68, 20, 140\} = 20$; La plus grande valeur qu'on peut affecter à x_2 est la petite des valeurs $\{68, 20, 140\}$ donc $x_2 = 20$.

Détermination de la variable sortante :

$$(S_7) \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 34 - \frac{1}{2} 20 = 24 \\ x_5 = 10 - \frac{1}{2} 20 = 0 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2} 20 = 60 \\ Z = 490 + 10 = 500 \end{array} \right.$$

La variable sortante est donc x_5

Solution de la 2^{ème} itération :

HB	$x_3 = 0, x_5 = 0$
B	$x_1 = 60$
	$x_2 = 20$
	$x_4 = 24$
	$Z = 500$

L'équation d'échange est celle qui fournit la variable sortante, c'est

$$x_5 = 10 + \frac{5}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_2$$

On utilise cette équation pour exprimer x_2 en fonction des nouvelles variables hors base :

$$x_2 = 20 - 2x_5 + 5x_3$$

On substitue cette expression dans (S_7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = -2x_5 + 20 + 5x_3 \\ x_4 = 34 + \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} (-2x_5 + 20 + 5x_3) \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} (-2x_5 + 20 + 5x_3) \\ Z = 490 - \frac{7}{2} x_3 + \frac{1}{2} (-2x_5 + 20 + 5x_3) \end{array} \right.$$

$$(S_8) : \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -2x_5 + 20 + 5x_3 \\ x_4 = 24 - 2x_3 + x_5 \\ x_1 = 60 - 3x_3 + x_5 \\ Z = 500 - x_3 - x_5 \end{array} \right.$$

La fonction économique n'est plus composée que de coefficients négatifs. Il n'est donc plus possible d'améliorer ni d'augmenter cette fonction économique. La solution précédente est donc optimale.

HB	:	$x_3 = 0, x_5 = 0$
B		$x_1 = 60$
		$x_2 = 20$
		$x_4 = 24$
Z		$= 500$

2- Présentation pratique (Méthode du simplexe) :

Elle a le principe de la méthode précédente, mais a l'avantage d'organiser tous les systèmes d'équations sous forme de tableaux.

2.1- Principe de la méthode :

1- Obtenir la forme canonique.

2- Obtenir la forme standard.

3- **Tableau n° 0** : Recherche de la solution extrême de base :

Les variables d'écart sont considérées au départ comme variables principales ou variable dans la base.

Les variables réelles sont non principales et se trouvent hors de la base. La fonction économique est alors nulle. Avec le tableau N° 0, on prépare le tableau N° 1 en choisissant respectivement la variable entrante, la variable sortante et le pivot :

- La variable entrante correspond au coefficient le plus élevé dans la fonction économique. La colonne de la variable entrante prend alors le nom de colonne pivot.
- La variable sortante correspondra au plus petit rapport positif issu de la division de la colonne second membre (les b_i) par la colonne variable entrante. Cette variable sortante de la base et sur la même ligne que le plus petit rapport positif. La ligne de la variable sortante prend le nom de ligne pivot.
- Le pivot se trouvera à l'intersection de la ligne pivot et de la colonne pivot.

Il s'agira ensuite de rendre la colonne pivot unitaire : c'est à dire, arriver à un pivot égal à 1 et tous les autres éléments de la même colonne pivot égaux à zéro jusqu'à la fonction économique (dernière ligne du tableau). Chaque itération s'arrête dès que la colonne pivot est devenue totalement unitaire.

4- On construit les différents tableaux jusqu'à ce que la fonction économique ne contienne plus que des nombres négatifs ou nulles ; cas où il n'est plus possible d'améliorer la fonction économique.

Remarque : Le pivot ne peut jamais être égal à 0

Exemple : Résoudre par, la méthode du simplexe, le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 11 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ \text{Max}(3x_1 + 2x_2) \end{aligned}$$

Forme standard :

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5 \end{cases} \\ \text{Max}(3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4) \end{aligned}$$

Tableau n° 0 :

Variable sortante = x_4

	To	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Rapport
A	x_3	<u>1</u>	5	1	0	$\frac{1}{1}$	11/1
B	x_4	2	3	0	1	<u>5</u>	5 / 2 ►
C	-Z	3	2	0	0	0	

Variable sortante = x_4

Variable entrante dans la base x_1 : elle a le plus grand coefficient.

La solution extrême de base est :

$$\begin{aligned} \text{Hors base : } x_1 = x_2 = 0 \\ \text{Base : } x_3 = 11, \quad x_4 = 5 \end{aligned}$$

Remarques :

- 1- L'ordre dans lequel on écrit la liste des variables de la base (x_3, x_4) est important.
- 2- À l'intersection de la colonne pivot (=1) et de la ligne pivot (=2)

Se trouve la valeur 2 entourée, il s'agit du pivot.

Tableau n° 1 : 1^{ère} itération Il s'agit de transformer le tableau N° 0, en un tableau équivalent (ce sera le tableau N° 1) de telle sorte que la colonne pivot devienne unitaire :

- 1- Arriver à 1 pivot = 1, pour cela il suffit de diviser toute la ligne du pivot par 2 (valeur du pivot).

2- Tous les autres éléments de la même colonne pivot égaux à zéro, pour cela il suffit de trouver pour chaque cas la transformation nécessaire, en utilisant la ligne du pivot.

Pour notre exemple, trouvons les transformations nécessaires d'abord.

La ligne B devient $B' = B/2$ c'est : $1 \quad 3/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad | \quad 5/2$

La ligne A :

$$\begin{array}{r|l} (-1) \times B' \rightarrow -1 & -3/2 \quad 0 \quad -1/2 \quad | \quad -5/2 \\ \hline A \rightarrow 1 & 5 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 11 \\ \hline A' \rightarrow 0 & 7/2 \quad 1 \quad -1/2 \quad | \quad 17/2 \end{array}$$

La ligne C :

$$\begin{array}{r|l} (-3) \times B' \rightarrow -3 & -9/2 \quad 0 \quad -3/2 \quad | \quad -15/2 \\ \hline C \rightarrow 3 & 2 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \\ \hline C' \rightarrow 0 & -5/2 \quad 0 \quad -3/2 \quad | \quad -15/2 \end{array}$$

On obtient alors le tableau N° 1 :

	T ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
A'	x ₃	0	7/2	1	-1/2	-17/2
B'	x ₁	1	3/2	0	1/2	5/2
C'	-Z	0	-5/2	0	-3/2	-15/2

Solution optimale :

$$\text{HB : } x_2 = x_4 = 0$$

$$\text{B : } x_1 = 5/2, \quad x_3 = 17/2$$

$$Z = 15/2$$

2.3- Un autre exemple : Résoudre par la méthode du simplexe le programme suivant :

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 3 \end{cases} \\ \text{Max}(2x_1 + 3x_2) = Z \end{array}$$

Forme standard :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \\ \hline x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 \\ \hline \end{array}$$

Variables réelles variables d'écart

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$$

Tableau N° 0 :

	T ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b	rappor t
A	x ₃	1	2	1	0	2	2/2
B	x ₄	1	4 Pivot	0	1	3	3/4
C	-Z	2	3	0	0	0	

Ligne pivot : x₄
Variable sortante.

Colonne pivot : x₂ variable entrante

La solution extrême de base est :

$$\begin{array}{l} \text{HB : } x_1 = 0, \quad 0 \quad x_2 = 0 \\ \text{B : } x_3 = 2, x_4 = 0 \\ \text{Z} = 0 \end{array}$$

Tableau N° 1 : 1^{ère} Itération

	T ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b	rappor t
A'	x ₃	1/2 Pivot	0	1	-1/2	1/2	(1/2)/(1/2)=1
B'	x ₂	1/4	1	0	1/4	3/4	(3/4)/(1/4)=3
C'	-Z	5/4	0	0	-3/4	-9/4	

Ligne pivot : x₃ variable sortante

Colonne pivot : x₁ variable entrante

Explication : (Comment a-t-on obtenu T_1)

$$\begin{array}{l|l} B \leftarrow & 1 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 3 \\ \hline B^1 = B/4 \leftarrow & 1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 1/4 \quad | \quad 3/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} B' \leftarrow & 1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 1/4 \quad | \quad 3/4 \\ A \leftarrow & 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 2 \\ \hline A' = A - 2B' \leftarrow & 1/2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/2 \quad | \quad -1/2 \end{array}$$



C'est l'opération nécessaire pour obtenir la valeur 0 sur la colonne pivot

$$\begin{array}{l|l} B' \leftarrow & 1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 1/4 \quad | \quad 3/4 \\ C \leftarrow & 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \\ \hline C' = C - 3B' \leftarrow & 5/4 \quad 0 \quad 0 \quad -3/4 \quad | \quad -9/4 \end{array}$$



C'est l'opération nécessaire pour obtenir la valeur 0 sur la colonne pivot.

La solution est :

HB : $x_1 = x_4 = 0$

B : $x_3 = 1/2$, $x_2 = 3/4$

Z = $9/4$

Tableau N° 2 : 2^{ème} Itération

	T ₂	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	b	rapport
A''	X ₁	1	0	2	-1	1	Rapport négatif
B''	X ₂	0	1	-1/2	1/2	1/2	(1/2)/(1/2)=1
C''	-Z	0	0	-5/2	1/2	-14/4	

Colonne

pivot : x_4 variable entrante

Ligne pivot : x_2 variable sortante

Explication : (comment a-t-on obtenu T_2) :

$$\begin{array}{l} A' \leftarrow \\ \hline A'' = A' \cdot 2 \leftarrow \end{array} \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

C'est l'opération nécessaire pour obtenir un 1

$$\begin{array}{l} A'' \leftarrow \\ B' \leftarrow \\ \hline B'' = B' - \frac{1}{4}A'' \leftarrow \end{array} \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A'' \leftarrow \\ C' \leftarrow \\ \hline C'' = C' - \frac{5}{4}A'' \leftarrow \end{array} \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{14}{4} \end{array}$$

La solution est :

$$HB : x_3 = x_4 = 0$$

$$B : x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$Z = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Tableau N° 3 : 3^{ème} Itération

A''	T ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
	x ₁	1	2	1	0	2
B'''	x ₄	0	2	-1	1	1
	-Z	0	-1	-2	0	4

C'est le tableau optimal ; mais comment l'a-t-on obtenu ?

Explication :

$$\begin{array}{cccc|c} B'' \leftarrow & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline B''' = 2.B'' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} B''' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 \\ A'' \leftarrow & 1 & 0 & 2 & -1 \\ \hline A''' = A'' + B''' \leftarrow & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} B''' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 \\ C'' \leftarrow & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{14}{4} \\ \hline C''' = C'' - \frac{1}{2}B''' \leftarrow & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

La solution optimale est :

HB : $x_2 = x_3 = 0$
B : $x_1 = 2$, $x_4 = 1$
Z = 4

Remarque : Notons que les opérations nécessaires pour obtenir une colonne pivot unitaire sont toujours uniques ; dans le tableau précédent :

- Pour obtenir 1 à la position du pivot, la seule opération (et nécessaire) est de multiplier toute la ligne du pivot par 2. Pour le reste des lignes (ie A'' et C'') ; l'opération aussi unique, pour chaque ligne, s'obtient par rapport à la ligne pivot B''' ; par exemple : $A''' = A'' + B'''$ est la seule opération qui : permet d'obtenir un 0 sur la colonne pivot et utilise la nouvelle ligne pivot B''' .

CONCLUSION :

La modélisation d'un problème par un programme linéaire, permet de rechercher l'optimum d'une fonction économique comportant plusieurs inconnues positives ou nulles liées entre elles, par des relations linéaires indépendantes appelées contraintes, quand le nombre de ses inconnues est égal à 2, la méthode simple et appropriée est évidemment la méthode graphique, dans le cas d'un problème à plus que 2 variables, on utilise la méthode du simplexe qui nécessite l'introduction de : la notation matricielle , la forme canonique, la forme standard, ...etc.

Les deux cours ont été consacrés à un aperçu sur une des techniques de la recherche opérationnelle ; passons à une autre technique aussi importante et aussi utile que la première. Il s'agit de la théorie des graphes.

EXERCICES :

EXERCICE N° 01 :

Écrire sous forme canonique (type I ou type II) les programmes linéaires suivants :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Max } (x_1 + 2x_2) \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ (24x_1 + 10x_2 + 72x_3) \text{Min} \end{cases}$$

$$(P_3) \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 2 \\ (2x_1 + 3x_2) \text{Max} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (P_4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ (x_1 - 2x_2 + x_3) \text{Min} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

EXERCICE N° 02 :

Écrire sous forme standard les programmes linéaires de l'exercice N° 1

EXERCICE N° 03 :

Résoudre par la méthode du simplexe les programmes suivants :

$$(P_1) \begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad + 4x_4 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18 \\ \text{Max } (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

$$(P_2) \begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 84 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ \text{Max}(4x_1 + 6x_2) = Z \end{cases}$$

$$(P_3) \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 = 7 \\ \quad x_2 \quad + x_5 = 3 \\ \text{Max } (4x_1 + 5x_2) \end{cases}$$

$$(P_4) \begin{cases} \text{Max } (x_1 + 2x_2) \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

SOLUTION :

EXERCICE N° 01 : (P₁) et (P₂) sont déjà écrits sous forme canonique :

Pour (P₃), il suffit de multiplier la 1^{ère} inéquation par (-1) on obtient :

$$(P_3)_q \begin{cases} -x_1 - x_2 & \leq -1 \\ x_1 + 4x_2 & \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 & \leq 2 \\ (2x_1 + 3x_2) \text{ Max} \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(P₃) q est sous forme canonique type 2

De même, pour (P₄), on obtient :

$$(P_4)_q \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 & \geq -9 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 & \geq 1 \\ (x_1 - 2x_2 + x_3) \text{ Min} \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

EXERCICE N° 02 :

$$(P_1)_s \begin{cases} x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \boxed{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0} \\ & & \text{variables .d' écart} \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & & = 18 \\ x_1 + x_2 & + x_4 & = 8 \\ 2x_1 + x_2 & & + x_5 = 14 \\ \text{Max } (x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

$$(P_2)_s \begin{cases} \boxed{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0} & \boxed{x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0} & \boxed{x_6 \geq 0 \quad x_7 \geq 0} \\ \text{var.réelles} & \text{var.d' écart} & \text{var.artificielles} \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 & + x_6 & = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 & - x_5 & + x_7 = 12 \\ \text{Min } (24x_1 + 10x_2 + 72x_3 + Mx_6 + Mx_7) \end{cases}$$

$$(P_3)_s \begin{cases} \boxed{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0} & \boxed{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0} & \boxed{x_6 \geq 0} \\ \text{var.réelles} & \text{var.d' écart} & \text{var.artificielles} \\ x_1 + x_2 - x_3 & & + x_6 = 1 \\ x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 2 \\ 6x_1 + x_2 & & + x_5 = 2 \\ \text{Max } (2x_1 + 3x_2 & & - Mx_6) \end{cases}$$

$$(P_4)_s \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0}_{\text{var.réelles}} \quad \underbrace{x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0}_{\text{var.d'écart}} \quad \underbrace{x_7 \geq 0 \quad x_8 \geq 0}_{\text{var.artificielles}} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 + x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_6 + x_8 = 1 \\ \text{Min } (x_1 - 2x_2 + x_3 + Mx_7 + Mx_8) \end{array} \right.$$

EXERCICE N° 03 :

La forme standard pour (P₁) est :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 12$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 18$$

$$\text{Max}(x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)$$

Tableau N° 0 :

	T ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	b	Rapport
A	x ₅	2	1	3	1	1	0	0	8	
B	x ₆	2	3	0	4	0	1	0	12	8/1
C	x ₇	3	1	2	0	0	0	1	18	12/3
D	-Z	1	2	1	1	0	0	0	0	18/1

ligne pivot :
x₆ : var. sortante

Colonne pivot : x₂ variable entrante

la solution extrême de base est :

HB : x₁ = x₂ = x₃ = x₄ = 0

B : x₅ = 8 x₆ = 12 x₇ = 18

Z = 0

- Comment obtenir T₁ : 1^{ère} Itération

$$\begin{array}{c|cccccccc|c} B \leftarrow & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline B' = B/3 \leftarrow & 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 B' \leftarrow \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc|c} 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array} \\
 A \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{array} \\
 \hline
 A' = A - B' \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} 4/3 & 0 & 3 & -1/3 & 1 & -1/3 & 0 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 B' \leftarrow \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc|c} 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array} \\
 C \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \\
 \hline
 C' = C - B' \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} 7/3 & 0 & 2 & -4/3 & 0 & -1/3 & 1 & 14 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 B' \leftarrow \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc|c} 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array} \\
 D \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
 \hline
 D' = D - 2B' \leftarrow \quad \begin{array}{cccccccc|c} -1/3 & 0 & 1 & -5/3 & 0 & -2/3 & 0 & -8 \end{array}
 \end{array}$$

Ainsi le tableau T_1 sera comme suit :

	T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	Rapport
A'	x_5	$4/3$	0	3	$-1/3$	1	$-1/3$	0	4	$4/3 \leftarrow$ ligne pivot x_5 : variable sortante
B'	x_2	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4	Indéfini
C'	x_7	$7/3$	0	2	$-4/3$	0	$-1/3$	1	14	14/2
D'	$-Z$	$-1/3$	0	1	$-5/3$	0	$-2/3$	0	-8	

entrante $\uparrow$ Colonne pivot : x_3 variable

La solution de base est :

HB : $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$

B : $x_2 = 4, x_5 = 4, x_7 = 14$

$Z = 8$

- Comment obtenir le 2^{ème} tableau : 2^{ème} itération

$$\begin{array}{l}
 A' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 4/3 & 0 & 3 & -1/3 & 1 & -1/3 & 0 & 4 \end{array} \\
 \hline
 A'' = A'/3 \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 A'' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3 \end{array} \\
 B' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array} \\
 \hline
 B'' = B' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

$\downarrow$
 C'est la même ligne : il n'y a aucune opération à faire puisqu'on a déjà le zéro sur la colonne du pivot.

$$\begin{array}{l}
 A'' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3 \end{array} \\
 C' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 7/3 & 0 & 2 & -4/3 & 0 & -1/3 & 1 & 14 \end{array} \\
 \hline
 C'' = C' - 2A'' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 13/9 & 0 & 0 & -10/9 & -2/3 & -1/9 & 1 & 34/3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 A'' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3 \end{array} \\
 D' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} -1/3 & 0 & 1 & -5/3 & 0 & -2/3 & 0 & -8 \end{array} \\
 \hline
 D'' = D' - A'' \leftarrow \begin{array}{ccccccc|c} -7/9 & 0 & 0 & -14/9 & -1/3 & -5/9 & 0 & -28/3 \end{array}
 \end{array}$$

La ligne D'' a tous ces coefficients ≤ 0 , T₂ sera le tableau optimal, écrivons le pour déduire la solution optimale :

La solution optimale

HB :

$x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$

	T ₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	b
A''	x ₃	4/9	0	1	-1/9	1/3	-1/9	0	4/3
B''	x ₂	2/3	1	0	4/3	0	1/3	0	4
C''	x ₇	13/9	0	0	-10/9	-2/3	-1/9	1	34/3
D''	-Z	-7/9	0	0	-14/9	-1/3	-5/9	0	-28/3

est :

B :

$$x_2 = 4, x_3 = \frac{4}{3}, x_7 = \frac{34}{3}$$

$$Z = \frac{28}{3}$$

Dans la suite ; on n'écrira plus comment obtenir les tableaux ; la forme standard de (P₂) est :

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$
v. réelles

$x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$
v. d'écart

$$4x_1 + 8x_2 + x_3 = 84$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$$

LE TABLEAU N° 0 :

T ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b	rapport
x ₃	4		1	0	84	84/8
x ₄	2	8	0	1	24	24/1
-Z	4	6	0	0	0	

← x₃ : Variable sortante

↑
x₂ : Variable entrante

La solution extrême de base est :

HB : $x_1 = x_2 = 0$

B : $x_3 = 84 ; x_4 = 24$

Z = 0

Le tableau N° 1 : 1^{ère} itération

T ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b	Rapport	
x ₂	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{21}{2}$	$\frac{(21/2)}{1/2}$	x ₄ : Variable sortante
x ₄	1 ↑	0	$-\frac{1}{4}$	1	3	$\frac{3}{1}$ ←	
- Z	1	0	$-\frac{3}{4}$	0	-63		x ₁ : Variable entrante

La solution de base est :

$$\text{HB : } x_1 = x_3 = 0$$

$$\text{B : } x_2 = \frac{21}{2}, x_4 = 3$$

$$Z = 63$$

Le tableau T₂ : 2^{ème} itération

T ₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
x ₂	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	9
x ₁	1	0	$-\frac{1}{4}$	1	3
-Z	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-66

La solution optimale est :

$$\text{HB : } x_3 = x_4 = 0$$

$$\text{B : } x_1 = 3; x_2 = 9$$

$$Z = 66$$

(P₃) est déjà écrit sous forme standard :

T ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	Rapport
x ₃	2	1	1	0	0	8	8/1
x ₄	1	2	0	1	0	7	7/2
x ₅	0	1	0	0	1	3	
-Z	4	5	0	0	0	0	3/1 ← x ₅ : v. sortante

x₂ : v.entrante ↑

La solution extrême de base est :

HB : x₁ = x₂ = 0
 B : x₃ = 8 , x₄ = 7 , x₅ = 3
 Z = 0

Le tableau N° 1 : 1^{ère} itération

T ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	rapport
x ₃	2	0	1	0	-1	5	5/2
x ₄	1	0	0	1	-2	1	1/1 ←
x ₂	0	1	0	0	1	3	indéfini
-Z	4	0	0	0	-5	-15	

x₁ : v. entrante ↑

La solution de base est :

HB : x₁ = x₅ = 0
 B : x₃ = 5, x₄ = 1 , x₂ = 3
 Z = 15

Le tableau N° 2 : 2^{ème} itération

T ₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	rapport
x ₃	0	0	1	-2	3	3	3/3 ←
x ₁	1	0	0	1	-2	1	< 0
x ₂	0	1	0	0	1	3	3/1
-Z	0	0	0	-4	↑ 3	-19	

x₃ : v.sortante

x₅ : v.entrante

La solution de base est :

$$\text{HB : } x_4 = x_5 = 0$$

$$\text{B : } x_3 = 3, x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$Z = 19$$



Le tableau N° 3 : 3^{ème} itération

T ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b
x ₅	0	0	1/3	-2/3	1	1
x ₁	1	0	2/3	-1/3	0	3
x ₂	0	1	-1/3	2/3	0	2
-Z	0	0	-1	-2	0	-22

La solution optimale, est atteinte ; c'est :

$$\text{HB : } x_3 = x_4 = 0$$

$$\text{B : } x_5 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$$

(P₄) est sous forme standard :

Le tableau N° 0 :

T ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	rapport
x ₄	-3	2	1	0	0	2	2/20 ← X ₃ : v. sortante
x ₄	-1	2	0	1	0	4	4/2
x ₅	1	1	0	0	1	5	5/1
-Z	1	2	0	0	0	0	

X₂ : var. entrante

La solution extrême de base est :

$$HB : x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 5$$

$$Z = 0$$

Le tableau N° 1 : 1^{ère} itération

T ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	rapport
x ₂	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	< 0
x ₄	2	0	-1	1	0	2	2/2
x ₅	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	4	8/5
-Z	4	0	-1	0	0	-2	

← X₄ : v. sortante

X₁ : v. entrante

La solution de base est :

$$HB : x_1 = x_3 = 0$$

$$x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 4$$

$$Z = 2$$

Le tableau N° 2 : 2^{ème} itération

T ₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	rapport
x ₂	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	5/2	< 0
x ₁	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	< 0
x ₅	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	3/2	(3/2) (3/4)
-Z	0	0	1	-2	0	-6	

← X₅

X₃

La solution de base est :

$$HB : x_3 = x_4 = 0$$

$$x_2 = \frac{5}{2}, x_1 = 1, x_5 = \frac{3}{2}$$

$$Z = 6$$

Le tableau N° 3 : 3^{ème} itération

T_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
x_3	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
-Z	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-8

T_3 est la tableau optimale , la solution optimale de base est :

HB : $x_4 = x_5 = 0$

B : $x_2 = 3, x_1 = 2, x_3 = 2$

Z = 8

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] P. Caron -A Juhel - F. Vendevelde : Programmation linéaire méthodes et applications (DUNOD)
- [2] F. Driesbeke, M.Hallin C. Lefèvre : La Programmation linéaire par l'exemple (Ellipses).
- [3] F.ECOTO : Initiation à la recherche opérationnelle (Ellipses).

LEÇON N°04 : RECHERCHE D'UN CHEMIN DE LONGUEUR MINIMALE ET DE LONGUEUR MAXIMALE DANS UN GRAPHE VALUÉ METHODE DE FORD.

OBJECTIF PEDAGOGIE : À la fin cette leçon, le stagiaire doit être capable de trouver un chemin de longueur minimale et un chemin de longueur maximale dans un graphe valué.

PLAN DE LA LEÇON :

I - INTRODUCTION

II- FORMULATION DU PROBLEME

III- RESOLUTION DU PROBLEME

- 1- Principe de la méthode de FORD (pour le minimum).
- 2- Application : recherche de chemin de longueur minimale à l'aide d'un graphe valué.
- 3- Principe de la méthode de FORD (pour le maximum).
- 4- Application : recherche de chemin de longueur maximale à l'aide d'un graphe valué.

CONCLUSION

EXERCICES CORRIGES

INTRODUCTION :

Supposons que dans un graphe orienté, on décide d'attribuer à chaque arc une longueur positive ou nulle, il est alors naturel de définir la longueur d'un chemin quelconque comme la somme des longueurs des arcs qui le composent. Un problème fondamental et qui se pose fréquemment dans les applications de la théorie des graphes, est celui de la recherche d'un chemin de longueur minimale ou maximale.

I- FORMULATION DU PROBLEME :

- Soit $G(X, U)$ un graphe orienté sans boucle comportant n sommets.

- A tout arc $(x_i, x_j) \in U$ est associé à un nombre réel l_{ij} appelé longueur de l'arc (x_i, x_j) . La longueur d'un chemin M quelconque notée $l(M)$ est alors définie comme la somme des longueurs des arcs qui le composent.

$$l(M) = \sum_{(x_i, x_j) \in M} l_{ij}$$

- Un chemin joignant un sommet x_i à un sommet x_j est dit de longueur minimale s'il minimise cette longueur $l(M)$ dans l'ensemble de tous les chemins joignant x_i à x_j . La longueur d'un tel chemin est appelée distance minimale.

Remarque :

1- Par abus de langage et bien que l'unicité ne soit pas nécessairement réalisée. On parle parfois de plus court chemin de x_i à x_j ;

2- Si à tout arc (x_i, x_j) d'un graphe $G(X, U)$ est associée une longueur, G est dite un graphe valué.

II- RÉOLUTION DU PROBLEME :

1- Principe de la méthode de FORD (pour le minimum) :

1^{ère} Etape : Numérotation des sommets du graphe valué dans n'importe quel ordre, mais en commençant par x_0 et en finissant par x_{n-1} (le nombre de sommets est n).

2^{ème} Etape : Affectation d'une valeur $t_i = +\infty$ avec $1 \leq i \leq n-1$ à tous les sommets sauf pour le sommet initial auquel on attribue la valeur $t_0 = 0$.

Remarque : La valeur $t_i = \infty$ peut être considérée comme la solution initiale.

Exemple : Mettre $t_2 = +\infty$ signifie l'existence d'un chemin de x_0 vers x_2 et qui est de longueur $+\infty$, évidemment ce n'est pas le chemin de longueur minimale. $t_0 = 0$ signifie que le plus court chemin de x_0 vers lui-même est de longueur nulle. La troisième étape a pour objectif d'améliorer cette solution.

3^{ème} étape : Pour chaque arc (x_i, x_j) , si la valeur t_j est supérieure à la quantité $t_i + l_{ij}$, on remplace alors t_j par $t_j = t_i + l_{ij}$. Par contre, si t_j est inférieure à $t_i + l_{ij}$ alors on ne change rien.

Remarque : À cette étape, la comparaison est faite entre deux solutions ; la solution actuelle : t_j est pour l'instant la meilleure solution pour le problème de chemin de longueur minimale de x_0 vers x_j .

La deuxième solution (éventuelle) :

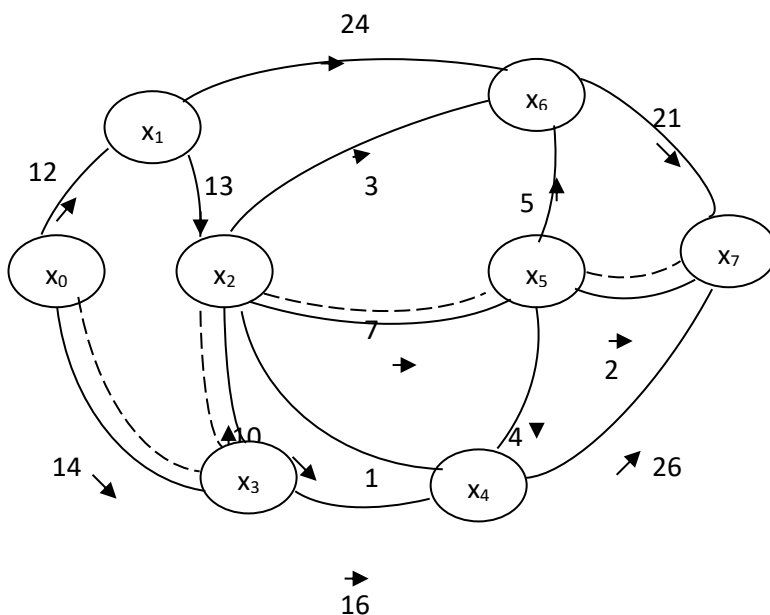
Cette deuxième solution suppose l'existence d'un plus court chemin de x_0 vers x_i ; de longueur t_i .

La comparaison $t_j > t_i + l_{ij}$ répond à la question : peut-on trouver, à partir de x_i , un plus court chemin de x_0 vers x_j ;

4^{ème} étape : On répète la 3^{ème} étape jusqu'à ce qu'aucun arc ne permette plus de diminuer les t_i .

2- Application : Recherche de chemin de longueur minimale à l'aide d'un graphe valué :

Trouver le chemin de longueur minimale du sommet x_0 vers le sommet x_7 dans le graphe valué suivant :



Remarque :

1- la longueur de l'arc $(x_0, x_1) = 12$, c'est-à-dire $l_{01} = 12$.

2- $M = \{(x_0, x_1), (x_1, x_6), (x_6, x_7)\}$ est un chemin de x_0 vers x_7 la longueur de ce chemin $l(M) = l_{01} + l_{16} + l_{67} = 12 + 24 + 21 = 57$.

Application de la méthode de FORD :

1- Les sommets sont déjà numérotés

2- $t_0 = 0$ et $t_i = +\infty$, $1 \leq i \leq 7$

A partir du sommet x_0 : (x_0, x_1) et (x_0, x_3)

Pour l'arc (x_0, x_1) : $t_1 = \infty$ et $t_0 + l_{01} = 0 + 12 = 12$.

$t_1 > 12$, on remplace alors t_1 par $t'_1 = t_0 + l_{01} = 12$.

Pour l'arc (x_0, x_3) : de même $t_3 = \infty$, $t_3 > t_0 + l_{03}$.

On remplace alors t_3 par $t'_3 = t_0 + l_{03} = 0 + 14 = 14$.

(x_1, x_6) et (x_1, x_2) .

Pour l'arc (x_1, x_6) : $t_1 = 12$ et $t_6 = \infty$, $l_{16} = 24$.

$t_6 > t_1 + l_{16}$ on remplace t_6 par $t_1 + l_{16} = 12 + 24 = 36$.

Pour l'arc (x_1, x_2) : $t_1 = 12$, $t_2 = \infty$, $l_{12} = 13$.

$t_2 > t_1 + l_{12}$, on remplace t_2 par $t'_2 = 12 + 13 = 25$.

Remarque : A chaque fois qu'on remplace t_i par une autre valeur ; ceci indique qu'on a trouvé un autre chemin de plus petite longueur.

Exemple : $t_2 = \infty$ remplacé par $t'_2 = 25$, indique qu'on a trouvé (à partir du sommet x_1) un chemin de x_0 vers x_2 de longueur 25, rappelons que $t_2 = \infty$ indique qu'on n'a pas encore trouvé un chemin de x_0 vers x_2 .

Continuons l'application de l'algorithme de FORD.

A partir du sommet x_2 : (x_2, x_6) , (x_2, x_5) , (x_2, x_4) .

Pour l'arc (x_2, x_6) : $t_2 = 25$, $t_6 = 36$ et $l_{26} = 3$.

$t_6 > t_2 + l_{26}$, on remplace t_6 par $t'_6 = t_2 + l_{26} = 28$.

Pour l'arc (x_2, x_5) : $t_2 = 25$, $t_5 = \infty$, $l_{25} = 7$.

$t_5 > t_2 + l_{25}$, on remplace t_5 par $t'_5 = t_2 + l_{25} = 32$.

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_2 = 25$, $t_4 = \infty$, $l_{24} = 1$.

$t_4 > t_2 + l_{24}$, on remplace t_4 par $t'_4 = t_2 + l_{24} = 26$.

A partir du sommet x_3 : (x_3, x_2) , (x_3, x_4) :

Pour l'arc (x_3, x_2) : $t_3 = 14$, $t_2 = 25$, $l_{32} = 10$.

$t_2 > t_3 + l_{32}$, on remplace t_2 par $t'_2 = t_3 + l_{32} = 24$.

Pour l'arc (x_3, x_4) : $t_3 = 14$, $t_4 = 26$ et $l_{34} = 16$.

$t_u < t_3 + l_{34}$, alors on ne change pas la valeur de t_4 .

Remarque : À partir du sommet x_3 , on a pu trouver un plus court chemin de x_0 vers x_2 qui est de longueur 24, alors que le sommet x_2 a déjà été exploré (quand $t_2 = 25$) et a permis de modifier t_6 , t_5 et t_4 . Il convient alors de reprendre le sommet x_2 .

A partir du sommet x_2 : (x_2, x_6) , (x_2, x_5) , (x_2, x_4)

Pour l'arc (x_2, x_6) : $t_2 = 24$, $t_6 = 28$, $l_{26} = 3$.

$t_6 > t_2 + l_{26}$, on remplace t_6 par $t'_6 = 27$.

Pour l'arc (x_2, x_5) : $t_2 = 24$, $t_5 = 32$, $l_{25} = 7$.

$t_5 > t_2 + l_{25}$, on remplace t_5 par $t'_5 = 31$.

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_2 = 24$, $t_4 = 26$, $l_{24} = 1$.

$t_4 > t_2 + l_{24}$ on remplace t_4 par $t'_4 = 25$.

A partir du sommet x_4 : (x_4, x_7)

Pour l'arc (x_4, x_7) : $t_4 = 25$, $t_7 = \infty$, $l_{47} = 26$.

$t_7 > t_4 + l_{47}$, on remplace t_7 par $t'_7 = t_4 + l_{47} = 51$.

A partir du sommet x_5 : (x_5, x_6) , (x_5, x_7)

Pour l'arc (x_5, x_6) : $t_5 = 31$, $t_6 = 27$, $l_{56} = 5$.

$t_6 < t_5 + l_{56}$, on ne change pas la valeur de t_6 .

Pour l'arc (x_5, x_7) : $t_5 = 31$, $t_7 = 51$, $l_{57} = 2$.

$t_7 > t_5 + l_{57}$, on remplace t_7 par $t'_7 = t_5 + l_{57} = 33$.

A partir du sommet x_6 : (x_6, x_7)

Pour l'arc (x_6, x_7) : $t_6 = 27$, $t_7 = 33$, $l_{67} = 21$.

$t_7 < t_6 + l_{67}$, on ne change pas la valeur de t_7 .

Ainsi, on a exploré tous les sommets, c'est la fin de l'application de la méthode de FORD.

En définitive, on obtient comme plus court chemin $(x_0, x_3, x_2, x_5, x_7)$, représenté en traits discontinus sur le graphe.

3- Principe de la méthode de FORD (pour le maximum) :

1^{ère} étape :

Numérotation des sommets du graphe valué dans n'importe quel ordre, mais en commençant par x_0 et en finissant par x_{n-1} (avec n : nombre total de sommet).

2^{ème} étape :

Affectation d'une valeur $t_i = 0$ avec $0 \leq i \leq n$ à tous les sommets du graphe valué.

3^{ème} étape :

Pour tout arc (x_i, x_j) , si la valeur t_j est inférieure à la quantité $t_i + l_{ij}$, on remplace alors t_j par $t_j' = t_i + l_{ij}$. Par contre, si t_j est supérieur à $t_j + l_{ij}$ alors on ne change rien.

4^{ème} étape :

On répète la 3^{ème} étape jusqu'à ce qu'aucun arc ne permette plus d'augmenter les t_i .

Remarques :

1- L'étape de numérotation est importante mais peut être faite d'une autre manière : 1, 2, ..., n ou A, B, C, ...

2- A l'étape N° 2 ; $t_i = 0$ peut être comme une solution initiale.

Exemple : Mettre $t_2 = 0$, signifie l'existence d'un chemin de x_0 vers x_2 et qui est de longueur zéro évidemment, ce n'est pas le chemin de longueur maximale.

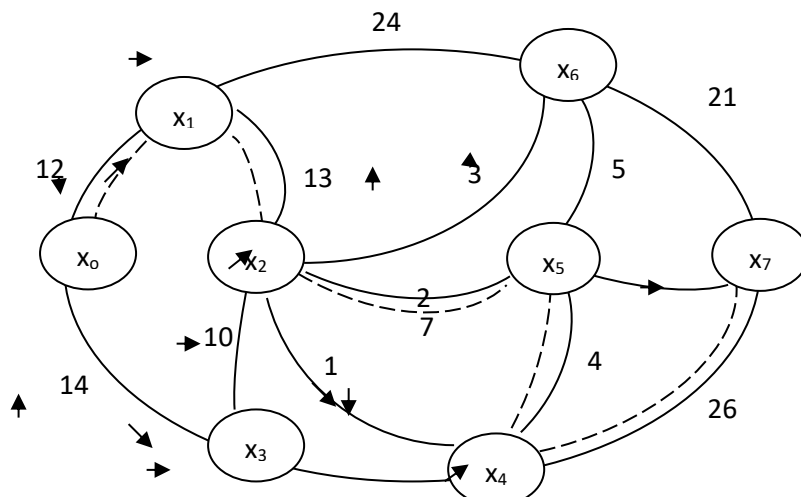
3- La 3^{ème} étape a pour objectif d'améliorer la solution initiale de l'étape N° 2.

À cette étape, la comparaison est faite entre 2 solutions, la solution actuelle : t_j est pour l'instant la meilleure solution pour le problème de chemin de longueur maximale de x_0 vers x_j . La 2^{ème} solution (éventuelle), suppose l'existence d'un plus long chemin de x_0 vers x_i , de longueur t_i .

La comparaison $t_j < t_i + l_{ij}$ répond à la question : peut-on trouver, à partir de x_i , un plus long chemin de x_0 vers x_j .

4- Application : recherche d'un chemin de longueur maximale à l'aide d'un graphe valué :

Trouver le chemin de longueur maximale du sommet x_0 vers le sommet x_7 dans le graphe valué suivant :



1- On affecte à chaque sommet x_i , la valeur $t_i = 0$.

(A partir du sommet x_0) : (x_0, x_1) et (x_0, x_3)

Pour l'arc (x_0, x_1) : $t_1 = 0$ et $t_0 + l_{01} = 12$.

$t_1 < 12$, on remplace t_1 par $t'_1 = t_0 + l_{01} = 12$.

Pour l'arc (x_0, x_3) , $t_3 = 0$ et $t_0 + l_{03} = 0 + 14$.

$t_3 < 14$, on remplace alors t_3 par $t'_3 = t_0 + l_{03} = 14$.

A partir du sommet x_1 : (x_1, x_6) et (x_1, x_2)

Pour l'arc (x_1, x_6) : $t_6 = 0$, $t_1 = 12$, $t_1 + l_{16} = 12 + 24 = 36$.

$t_6 < 36$, on remplace t_6 par $t'_6 = 36$.

Pour l'arc (x_1, x_2) : $t_2 = 0$, $t_1 = 12$, $t_1 + l_{12} = 13$; $t_1 + l_{12} = 25$.

$t_2 < 25$, on remplace alors t_2 par $t'_2 = 25$.

A partir du sommet x_2 : (x_2, x_4) , (x_2, x_5) , (x_2, x_6) .

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_4 = 0$, $t_2 = 25$, $t_2 + l_{24} = 26$.

$t_4 < 26$, on remplace alors t_4 par $t'_4 = t_2 + l_{24} = 26$.

Pour l'arc (x_2, x_5) : $t_5 = 0$, $t_2 = 25$, $t_2 + l_{25} = 25 + 7 = 32$.

$t_5 < 32$, on remplace alors t_5 par $t'_5 = t_2 + l_{25} = 32$.

Pour l'arc (x_2, x_6) : $t_6 = 36$, $t_2 = 25$, $t_2 + l_{26} = 25 + 3 = 28$.

$t_6 > 28$, on ne change pas la valeur de t_6 .

A partir du sommet x_3 : (x_3, x_2) , (x_3, x_4) :

Pour l'arc (x_3, x_2) : $t_2 = 25$, $t_3 = 14$, $t_3 + l_{32} = 14 + 10 = 24$.

$t_2 > 24$, on ne change pas la valeur de t_2 .

Pour l'arc (x_3, x_4) : $t_4 = 26$, $t_3 = 14$, $t_3 + l_{34} = 14 + 16 = 30$.

$t_4 < 30$, on remplace alors t_4 par $t'_4 = t_3 + l_{34} = 30$.

A partir du sommet x_4 : (x_4, x_7)

Pour l'arc (x_4, x_7) : $t_7 = 0$, $t_4 = 30$, $t_4 + l_{47} = 56$.

$t_7 < 56$, on remplace alors t_7 par $t'_7 = t_4 + l_{47} = 56$.

A partir du sommet x_5 : (x_5, x_4) , (x_5, x_6) , (x_5, x_7) :

Pour l'arc (x_5, x_4) : $t_4 = 30$, $t_5 = 32$, $t_5 + l_{54} = 4$, $t_5 + l_{54} = 36$.

$t_4 < 36$, on remplace t_4 par $t'_4 = t_5 + l_{54} = 36$.

Pour l'arc (x_5, x_6) : $t_6 = 36$, $t_5 = 32$, $t_5 + l_{56} = 32 + 5 = 37$.

$t_6 < 37$, on remplace alors t_6 par $t'_6 = t_5 + l_{56} = 37$.

Pour l'arc (x_5, x_7) : $t_7 = 56$, $t_5 = 32$, $t_5 + l_{57} = 32 + 2 = 34$.

$t_7 > 34$, on ne change pas la valeur de t_7 .

Puisque la valeur de t_4 a changé ($t_4 = 36$), on reprend alors les arcs qui partent du sommet x_4 , il s'agit de (x_4, x_7) seulement :

$t_7 = 56$, $t_4 = 36$, $l_{47} = 26$, $t_4 + l_{47} = 62$.

$t_7 < 62$, on remplace t_7 par $t'_7 = 62$.

A partir du sommet x_6 : (x_6, x_7) :

$t_7 = 62$, $t_6 = 37$, $t_6 + l_{67} = 37 + 21 = 58$.

$t_7 > 58$, on ne change pas la valeur de t_7 .

A la fin de l'application de la méthode de FORD, le chemin le plus long mesure 62.

En définitive, on obtient comme chemin le plus long $(x_0, x_1, x_2, x_5, x_4, x_7)$ représenté en traits discontinus sur le graphe.

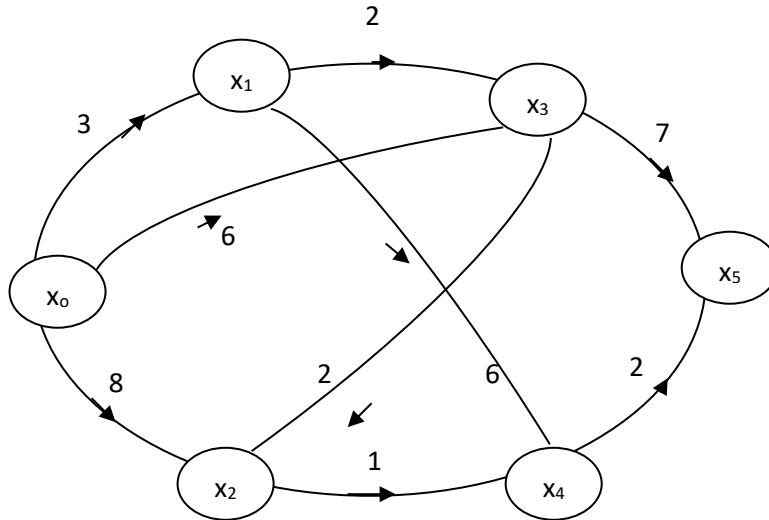
CONCLUSION :

Dans ce cours, on a utilisé le concept de graphe pour représenter un problème économique, c'est celui de la recherche de chemin de longueur minimale ou maximale. Ainsi on a présenté une méthode (ou algorithme) appelée méthode de FORD, pour résoudre ce problème, cette méthode a comme principe de donner une solution initiale et de procéder par comparaison entre deux solutions, jusqu'à ce qu'il n'y a plus de comparaisons possibles.

EXERCICES CORRIGES :

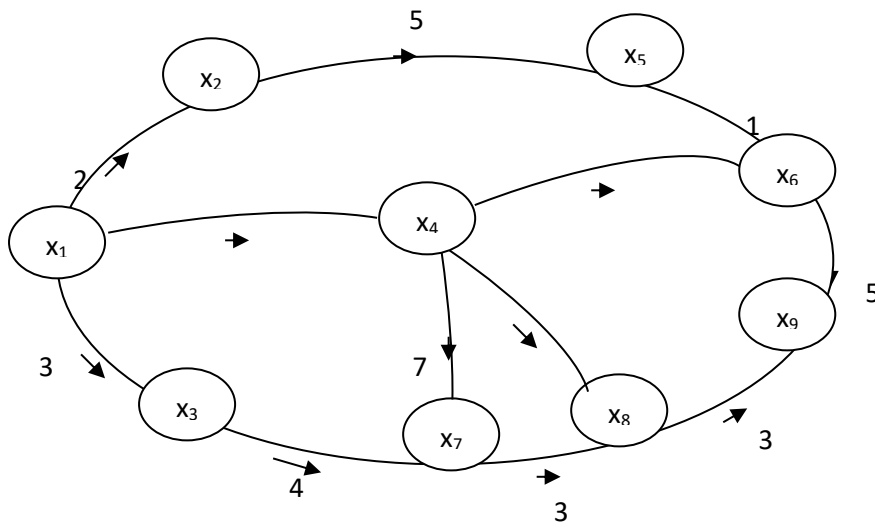
EXERCICE N° 1 :

En appliquant la méthode de FORD, trouver le chemin de longueur minimale de x_0 vers x_5 dans le graphe suivant :



EXERCICE N° 02 :

En appliquant la méthode de FORD, trouver le chemin de longueur maximale de x_1 vers x_9 dans le graphe suivant :



SOLUTIONS :

EXERCICE N° 1 :

1- Les sommets sont déjà numérotés.

2- Puisqu'il s'agit de la recherche d'un chemin de longueur minimale, on affecte au sommet x_0 la valeur $t_0 = 0$ et au reste des sommets les valeurs : $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = +\infty$.

A partir du sommet x_0 : (x_0, x_1) , (x_0, x_2) , (x_0, x_3)

Pour l'arc (x_0, x_1) : $t_0 + l_{01} = 0 + 3 = 3$ et $t_1 = +\infty$.

$t_1 > 3$, alors on remplace t_1 par $t'_1 = 3$.

Pour l'arc (x_0, x_2) : de même on remplace $t_2 = +\infty$ par $t'_2 = t_0 + l_{02} = 8$.

Et pour l'arc (x_0, x_3) : de même, on remplace $t_3 = +\infty$ par $t'_3 = t_0 + l_{03} = 6$.

A partir du sommet x_1 : (x_1, x_3) , (x_1, x_4)

Pour l'arc (x_1, x_3) : $t_3 = 6$, $t_1 = 3$, $t_1 + l_{13} = 5$.

$t_3 > 5$, on remplace alors t_3 par $t'_3 = t_1 + l_{13} = 5$.

Pour l'arc (x_1, x_4) : $t_4 = +\infty$, $t_1 + l_{14} = 3 + 6 = 9$.

$t_4 > 9$, on remplace alors t_4 par $t'_4 = t_1 + l_{14} = 3 + 6 = 9$.

A partir du sommet x_2 :

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_4 = 9$, $t_2 = 8$, $t_2 + l_{24} = 8 + 1 = 9$.

$t_4 = 9$, la valeur reste $t_4 = 9$.

Remarque : Cette comparaison, entre deux valeurs égales, indique qu'il existe 2 chemins différents de x_0 vers x_4 et qui sont de même longueur, ce sont : (x_0, x_2, x_4) et (x_0, x_1, x_4)

A partir du sommet x_3 : (x_3, x_2) , (x_3, x_5) .

Pour l'arc (x_3, x_2) : $t_2 = 8$, $t_3 = 5$, $t_3 + l_{32} = 5 + 2 = 7$.

$t_2 > 7$, on remplace alors t_2 par $t'_2 = t_3 + l_{32} = 7$.

Pour l'arc (x_3, x_5) : $t_5 = \infty$, $t_3 = 5$, $t_3 + l_{35} = 5 + 7 = 12$

$t_5 > 12$, on remplace alors t_5 par $t'_5 = t_3 + l_{35} = 12$.

Remarque : A partir du sommet x_3 , on a changé la valeur de t_2 , il convient alors de réexaminer le sommet x_2 :

A partir de somme x_2 : (x_2, x_4) :

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_4 = 9$, $t_2 = 7$, $t_2 + l_{24} = 7 + 1 = 8$.

$t_4 > 8$, on remplace t_4 par $t'_4 = t_2 + l_{24} = 8$.

Continuons l'application de la méthode de FORD.

A partir du sommet x_4 : (x_4, x_5)

Pour l'arc (x_4, x_5) : $t_5 = 12$, $t_4 = 8$, $t_4 + l_{45} = 8 + 2 = 10$.

$t_5 > 10$, on remplace t_5 par $t'_5 = t_4 + l_{45} = 10$.

En définitive, on obtient le plus court chemin de x_0 vers x_5 de longueur 10, le chemin est : $(x_0, x_1, x_3, x_2, x_4, x_5)$.

EXERCICE N° 2 :

1- Les sommets sont numérotés.

2- $t_1 = t_2 = \dots = t_9 = 0$

A partir de x_1 : (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_1, x_4)

Pour l'arc (x_1, x_2) : $t_2 = 0$, $t_1 = 0$, $t_1 + l_{12} = 0 + 2 = 2$.

$t_2 < 2$, on remplace t_2 par $t'_2 = t_1 + l_{12} = 2$.

Pour l'arc (x_1, x_3) : $t_3 = 0$, $t_1 = 0$, $t_1 + l_{13} = 0 + 3 = 3$.

$t_3 < 3$, on remplace t_3 par $t'_3 = t_1 + l_{13} = 3$.

Pour l'arc (x_1, x_4) : $t_4 = 0$, $t_1 = 0$, $t_1 + l_{14} = 0 + 5 = 5$.

$t_4 < 5$, on remplace t_4 par $t'_4 = t_1 + l_{14} = 5$.

A partir de x_2 : (x_2, x_4) , (x_2, x_5)

Pour l'arc (x_2, x_4) : $t_4 = 5$, $t_2 = 2$, $t_2 + l_{24} = 5$.

$t_4 = 5$, la valeur de t_4 ne change pas.

Pour l'arc (x_2, x_5) : $t_5 = 0$, $t_2 = 2$, $t_2 + l_{25} = 2 + 5 = 7$.

$t_5 < 7$, on remplace t_5 par $t'_5 = t_2 + l_{25} = 7$.

A partir de x_3 : (x_3, x_4) , (x_3, x_7)

Pour l'arc (x_3, x_4) : $t_4 = 5$, $t_3 = 3$, $t_3 + l_{34} = 3 + 4 = 7$.

$t_4 < 7$, on remplace t_4 par $t'_4 = t_3 + l_{34} = 7$.

Pour l'arc (x_3, x_7) : $t_7 = 0$, $t_3 = 3$, $t_3 + l_{37} = 3 + 4 = 7$.

$t_7 < 7$, on remplace t_7 par $t'_7 = t_3 + l_{37} = 7$

A partir du sommet x_4 : (x_4, x_6) , (x_4, x_7) , (x_4, x_8)

Pour l'arc (x_4, x_6) : $t_6 = 0$, $t_4 = 7$, $t_4 + l_{46} = 7 + 4 = 11$.

$t_6 < 11$, on remplace t_6 par $t'_6 = t_4 + l_{46} = 11$.

Pour l'arc (x_4, x_7) : $t_7 = 7$, $t_4 = 7$, $t_4 + l_{47} = 7 + 7 = 14$.

$t_7 < 14$, on remplace t_7 par $t'_7 = t_4 + l_{47} = 14$.

Pour l'arc (x_4, x_8) : $t_8 = 0$, $t_4 = 7$, $t_4 + l_{48} = 7 + 2 = 9$.

$t_8 < 9$, on remplace t_8 par $t'_8 = t_4 + l_{48} = 9$.

A partir du sommet x_5 : (x_5, x_6)

Pour l'arc (x_5, x_6) : $t_6 = 11$, $t_5 = 7$, $t_5 + l_{56} = 7 + 1 = 8$.

$t_6 > 8$, on ne change pas la valeur de t_6 .

A partir du sommet x_6 : (x_6, x_9)

Pour l'arc (x_6, x_9) : $t_9 = 0$, $t_6 = 11$, $t_6 + l_{69} = 11 + 5 = 16$

$t_9 < 16$, on remplace alors t_9 par $t'_9 = t_6 + l_{69} = 16$

A partir du sommet x_7 : (x_7, x_8)

Pour l'arc (x_7, x_8) : $t_8 = 9$, $t_7 = 14$, $t_7 + l_{78} = 14 + 3 = 17$

$t_8 < 17$, on remplace t_8 par $t'_8 = t_7 + l_{78} = 17$

A partir du sommet x_8 : (x_8, x_9)

Pour l'arc (x_8, x_9) : $t_9 = 16$, $t_8 = 17$, $t_8 + l_{89} = 17 + 3 = 20$

$t_9 < 20$, on remplace t_9 par $t'_9 = t_8 + l_{89} = 20$

Ainsi, on obtient, un plus long chemin de x_1 vers x_9 de longueur 20, c'est : $(x_1, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9)$.

LEÇON N°05:PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :METHODE PERT

OBJECTIF PEDAGOGIQUE : À la fin cette leçon, le stagiaire doit être capable de déterminer et d'exécuter des diverses tâches.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I- DEFINITIONS

- 1- Projet
- 2- Notion de tâche

II- REPRESENTATION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT

- 1- Par le diagramme de Gantt
- 2- Représentation d'un problème d'ordonnancement par un graphe

III- RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT

- 1- Les dates au plus tôt et au plus tard des tâches
- 2- Les dates au plus tôt et au plus tard des étapes

IV- CONCLUSION

EXERCICES CORRIGES

INTRODUCTION :

Étant donné un objectif qu'on se propose d'atteindre et dont la réalisation suppose l'exécution préalable de multiples tâches soumises à de nombreuses conditions ou contraintes, le problème d'ordonnancement est alors le problème de détermination de l'ordre et le calendrier d'exécution des diverses tâches.

I- DEFINITIONS :

1- Le projet :

C'est un ensemble de tâches ou d'opérations a, b, c,....permettant d'atteindre un objectif fixé ; lesquelles tâches sont elles mêmes soumises à un certain nombre de contraintes telles que :

- a. Les contraintes potentielles ;
- b. Les contraintes disjonctives ;
- c. Les contraintes cumulatives.

a- Les contraintes potentielles : On distingue :

Les contraintes de succession encore appelées contraintes d'antériorité qui se traduisent par le fait qu'une tâche **A** ne peut commencer que si la tâche **B** est achevée.

Les contraintes de localisation temporelle : qui impliquent qu'une tâche **A** ne peut débuter avant une date imposée (par exemple : l'appareil que nécessite cette tâche n'est pas disponible avant cette date) ou ne peut se terminer après une date imposée (par exemple : l'appareil que nécessite cette tâche doit être impérativement libérée avant cette date).

b- Les contraintes disjonctives : Ces contraintes imposent la non réalisation simultanée de deux tâches **A** et **B**, pour des raisons d'utilisation d'un même appareil, par exemple ou pour cause de besoin en main d'œuvre.

c- Les contraintes cumulatives : Celles-ci limitent les possibilités d'ordonnancement, car elles tiennent compte de tous les facteurs productifs : hommes, machines, moyens financiers. C'est ainsi qu'il ne saurait être question de programmer par exemple, pour un mois donné des tâches qui , en temps normal, requièrent tout ensemble, l'équivalent de six mois de travail d'un corps de métier qui ne comporterait sur le terrain que deux représentants.

2- Notion de tâche :

Une tâche ou activité est une opération, l'ensemble des tâches forment le projet, on peut donc la définir comme étant l'unité ou l'élément d'un projet. On associe à chaque tâche sa durée et une contrainte d'antériorité par rapport aux autres tâches.

C'est ainsi qu'on peut dire que **A** est immédiatement antérieure à **B** si **B** ne peut débuter que lorsque **A** est achevée.

Dans la suite de ce cours, nous allons étudier le cas particulier le plus important « Problème central d'ordonnancement » où les seules contraintes sont des contraintes de successions dans le temps : l'exécution de la tâche j ne peut être commencée que lorsque la tâche i est achevée.

Exemple : La construction d'un pavillon demande la réalisation d'un certain nombre de tâches qui sont données avec leurs durées et relations d'antériorités, dans le tableau suivant :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée (en semaine)	Tâches antérieures
A	Travaux de maçonnerie	7	/
B	Charpente de la toiture	3	A
C	Toiture	1	B
D	Installations sanitaire et électrique	8	A
E	Façade	2	D et C
F	Fenêtres	1	D et C
G	Aménagement du jardin	1	D et C
H	Travaux de plafonnage	3	F
I	Mise en peinture	2	H
J	Emménagement	1	E, G et I

II-REPRESENTATION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :

1- Par le diagramme de Gantt :

a- But du diagramme de Gantt : C'est un planning ayant pour but de mettre en évidence les durées et de permettre ainsi le contrôle, à tout moment, de l'évolution du projet par comparaison des réalisations aux prévisions.

b-Construction du diagramme de Gantt :

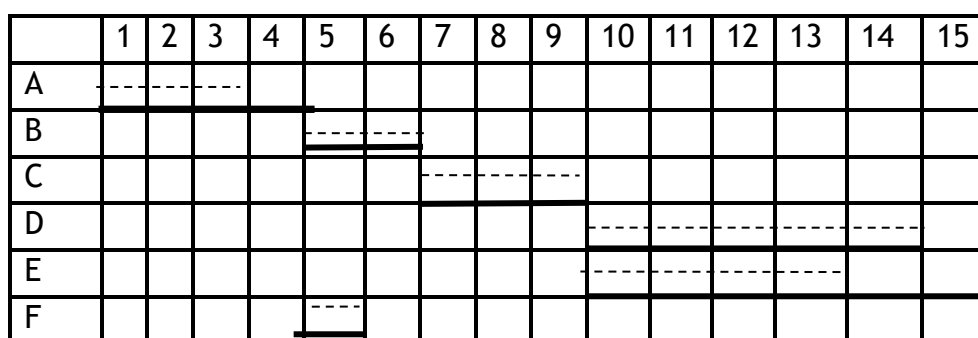
- **Principe de construction :** Le diagramme de Gantt se présente sous forme d'un tableau quadrillé dans lequel une colonne correspond à une unité de temps et une ligne à une tâche. Une tâche se matérialise par une barre horizontale dont la longueur représente la durée (de la tâche).

Le travail effectué ou le déroulement réel du projet se présente parfois, par des barres horizontales en pointillés, juste au dessus de celles figurant les prévisions (C'est-à-dire les durées des tâches).

- **Application** : Un projet se décompose en 6 tâches dont les caractéristiques sont les suivantes :

Tâches	Durées prévues	Tâches antérieures	Durées réalisées
A	4 mois	/	3
B	2 mois	A	2
C	3 mois	B	3
D	5 mois	C	5
E	6 mois	C	4
F	1 mois	A	1

En déduire le diagramme de Gantt correspondant à l'état d'avancement du projet au 15^{ième} mois.



On constate, au 15^{ième} mois, que toutes les tâches ont respecté les délais impartis sauf A et E.

La tâche A est en retard d'un mois et la tâche E de deux mois. Les tâches B et F succédant à A sont réalisées complètement alors que D et E succédant à C ne le sont pas ; simultanément commencées (à la même date) seule la tâche D s'est terminée dans le délai imparti..

c- Avantages du diagramme de Gantt :

- Il est facilement compréhensible par les exécutants du projet, de par sa clarté et sa simplicité ;
- Il peut servir de base à des plans d'actions intermédiaires plus détaillés ;
- Il permet de suivre le déroulement des opérations dans le temps.

d-Inconvénients du diagramme de Gantt :

- Il est impossible de rectifier ponctuellement la durée d'une tâche précise, sans avoir à décaler d'autant les suivantes et à redresser partiellement ou complètement le diagramme ;
- Le diagramme de Gantt présente également une insuffisance dans la mise en évidence des liaisons existante entre les différentes tâches.

2- Représentation d'un problème d'ordonnancement par un graphe :

La représentation par un graphe ; d'un problème d'ordonnancement permettra une bonne vision globale du problème. L'étude de ce graphe permettra alors d'identifier les tâches prioritaires et de détecter à temps les retards pour prendre les mesures correctives.

Nous allons citer deux représentations possibles :

- 1- Le graphe potentiel-tâches ;
- 2- Le graphe potentiel-étapes (Pert).

a- Graphe potentiel-tâches : À partir d'un projet donné, on peut construire le graphe suivant :

- 1- A chaque tâche (notée i) du projet, on associe un sommet (noté i) du graphe.

Exemple : Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; à chaque tâche de ce projet on associe un sommet du graphe potentiel-tâches. Ainsi le graphe contient les sommets A,B,C,D,E,F,G,H,I,J.

- 2- On définit un arc du sommet i vers le sommet j de longueur d_i si la tâche i doit précéder la tâche j où d_i est la durée de la tâche i

Exemple : Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; d'après le tableau représentant ce projet : La tâche B nécessite l'exécution de la tâche A, la durée de A est 7 semaines, le graphe potentiel-tâches qui représente ce projet contient donc un arc du sommet A vers le sommet B sa longueur est 7. La tâche E nécessite l'exécution des tâches D et C, la durée de C est une semaine, celle de D est 8 semaines, le graphe potentiel-tâches qui représente ce graphe contient donc les deux arcs :

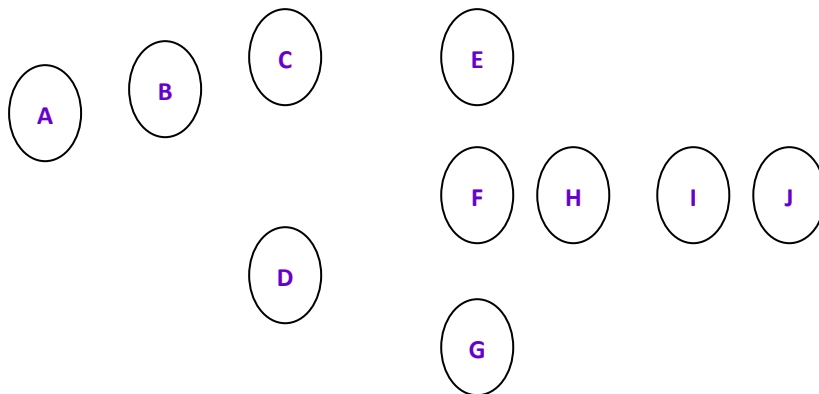
- Du sommet D au sommet E, sa longueur est 8 ;
- Du sommet C au sommet E, sa longueur est 1.

- 3- On ajoute au graphe ainsi obtenu ; deux sommets DP et FP correspondant à deux tâches fictives, respectivement, la tâche début du projet de durée 0 qui doit être antérieure à toutes les autres tâches (pour cela, il suffit de relier DP aux sommets sans prédécesseurs seulement). Et la tâche Fin du projet qui doit être postérieure à toutes les autres tâches (il suffira de la relier aux sommets sans successeurs seulement).

Application : Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; donner sa représentation par un graphe potentiel-tâches.

Solutions :

1- Le graphe potentiel-tâches contient les sommets suivants :



La tâche D nécessite A, alors le graphe contient un arc de A vers D de longueur 7 (durée de la tâche A).

La tâche E nécessite D et C, alors le graphe contient un arc de D vers E de longueur 8 (durée de la tâche D) et un arc de C vers E de longueur 1 (durée de la tâche C).

La tâche F nécessite les tâches D et C, alors le graphe contient un arc de D vers F de longueur 8 (durée de la tâche D) et un arc de C vers F de longueur 1 (durée de la tâche C).

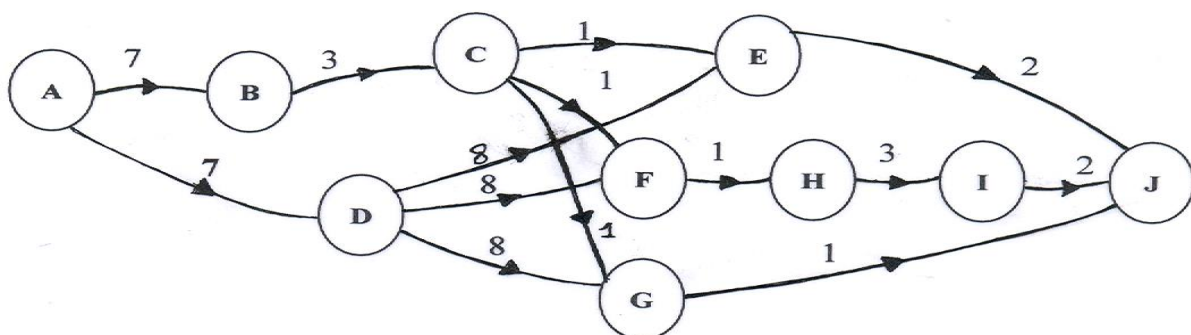
La tâche G nécessite les tâches D et C, alors le graphe contient un arc de D vers G de longueur 8 (durée de la tâche D) et un arc de C vers G de longueur 1 (durée de la tâche C).

La tâche H nécessite la tâche F, alors le graphe contient un arc de F vers H de longueur 1 (durée de la tâche F).

La tâche I nécessite la tâche H, alors le graphe contient un arc de H vers I de longueur 3 (durée de la tâche H).

La tâche J nécessite les trois tâches E, G et I, alors le graphe contient les trois arcs : de E vers J de longueur 2 (durée de la tâche E) et de G vers J de longueur 1 (durée de la tâche G) et de I vers J de longueur 2 (durée de la tâche I).

Ainsi, on obtient le graphe suivant :



D'après le tableau qui décrit les contraintes du projet (paragraphe de définition) on obtient le graphe potentiel-tâche de la manière suivante :

- La tâche B nécessite A, alors le graphe contient un arc de A vers B de longueur 7 (durée de la tâche A)
- La tâche C nécessite B, alors le graphe contient un arc de B vers C de longueur 3 (durée de la tâche B)

On remarque que la durée de la tâche J ne figure pas sur le graphe. Ce dernier n'exprime pas complètement notre projet, le rajout des deux sommets DP et FP va nous permettre de compléter cette représentation.

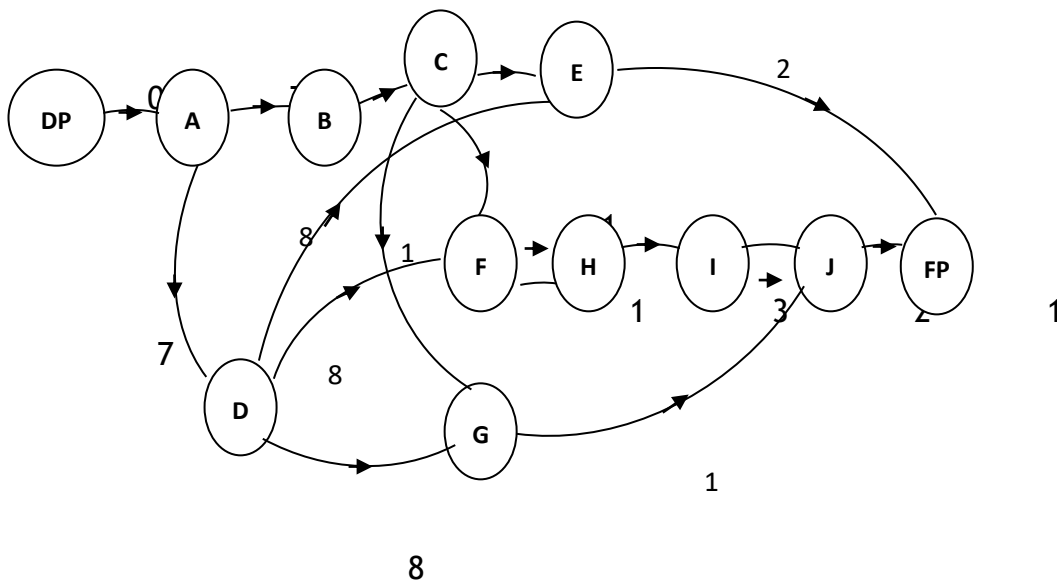
D'après la définition de la tâche fictive DP : elle est antérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet DP à tous les sommets sans précédents, dans notre exemple, il y a un seul (le sommet A).

D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est postérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet FP à tous les sommets sans successeurs, dans notre cas, il y a un seul (le sommet J) .

Au graphe ci-dessus, on rajoute alors :

- Deux sommets DP et FP.
- Deux arcs : de DP vers A de longueur 0 (durée de la tâche DP) ; de J vers FP de longueur 1 (durée de la tâche J) .

Enfin on obtient le graphe suivant :



Ainsi, nous avons représenté un problème d'ordonnancement par un graphe potentiel-tâches ; l'objet du paragraphe suivant est sa représentation par la méthode Pert ; et chaque une de ces deux représentations permet de calculer au commencement du projet, le temps nécessaire à sa réalisation.

Ces deux représentations nous indiquent pour ceci, les tâches critiques c'est à dire celles qui ne doivent souffrir d'aucun retard, car au cas où se retard aura lieu, il se répercutera sur la durée totale du projet, et les tâches disposants d'une durée de flottement nous permettent de nous réorganiser au mieux et en tirer profit.

2- Représentation d'un problème d'ordonnancement par la méthode Pert :

Dans cette représentation, les tâches seront les arcs du graphe, la longueur de chaque arc sera la durée de la tâche correspondante.

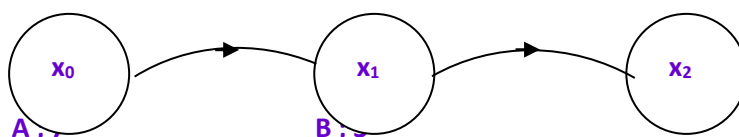
Exemple : Le graphe Pert qui représente le projet de construction d'un pavillon contient 10 arcs :

Le premier associé à la tâche A de longueur 7, le deuxième est associé à la tâche B, il est de longueur 3, le troisième est associé à la tâche C, il est de longueur 1, ...etc....

La question qui se pose est : Quels sont les sommets de ce graphe ?

Les sommets du graphe de Pert s'interprètent comme des étapes du projet. Chaque étape sera définie par un ensemble de tâches ayant déjà été effectuées. Si une tâche J nécessite l'exécution d'une tâche i, alors l'extrémité initiale de l'arc associé à la tâche J (noté u_j) doit coïncider avec l'extrémité terminale de l'arc associé à la tâche i, (noté u_i).

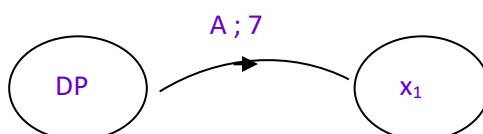
Exemple : Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; le graphe Pert associé à ce projet contient l'arc A de longueur 7 et l'arc B de longueur 3, comme la tâche B nécessite l'exécution de A, alors l'extrémité terminale de A est égale à l'extrémité initiale de B, ceci peut être exprimé par le schéma suivant :



Application : Donner la représentation graphique du projet de construction d'un pavillon par la méthode Pert.

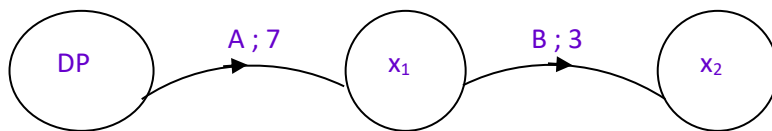
Solution :

- La tâche A ne nécessite l'exécution d'aucune tâche, donc le début de la tâche A coïncide avec le début du projet noté DP.



- La tâche B est précédée par la tâche A :

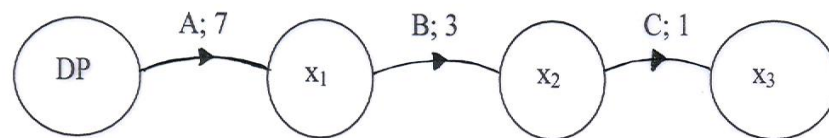
Représentation graphique :



14

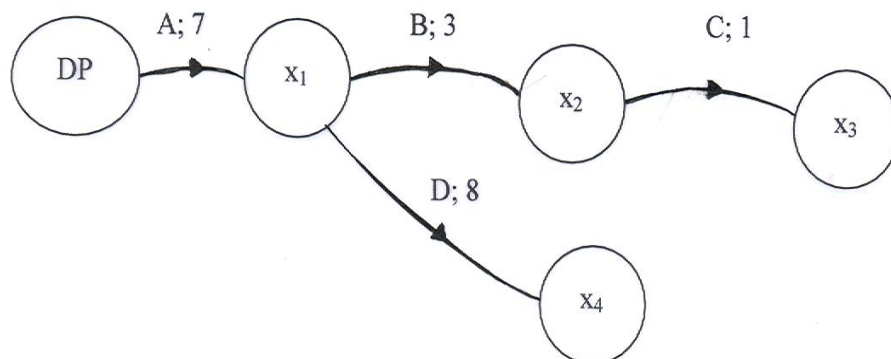
- La tâche C est précédée par la tâche B :

Représentation graphique :



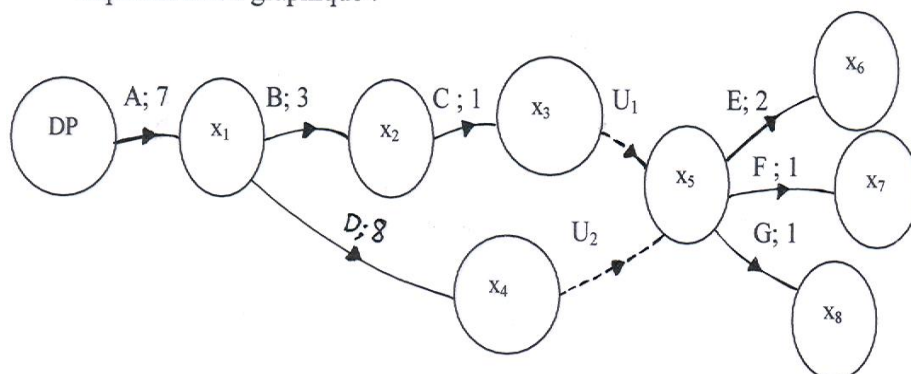
- La tâche D est précédée par A :

Représentation graphique :

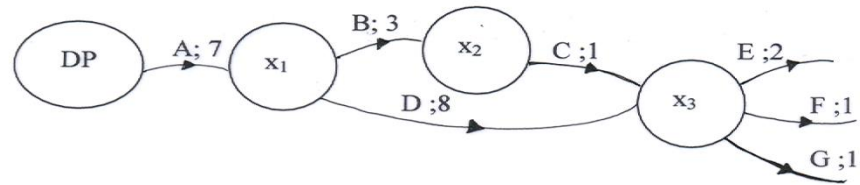


- Chaque'une des tâches E,F, et G est précédée par les tâches D et C

Représentation graphique :

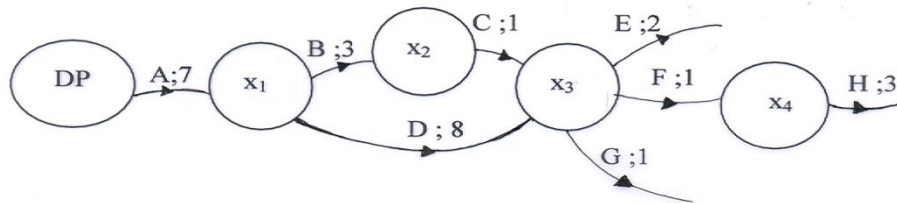


Les tâches U_1 et U_2 sont des tâches fictives qui peuvent être supprimées, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



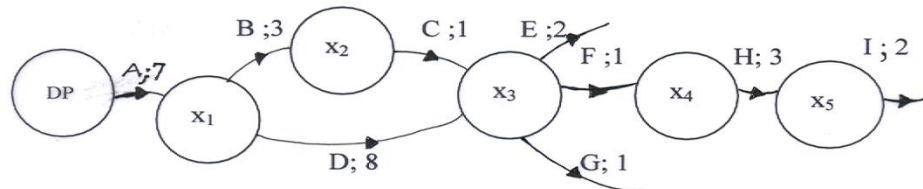
- La tâche H nécessite F :

Représentation graphique :



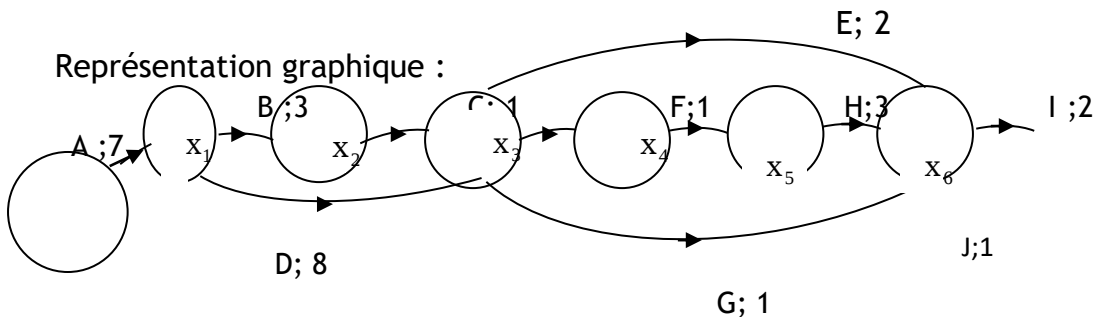
- La tâche I nécessite H :

Représentation graphique :

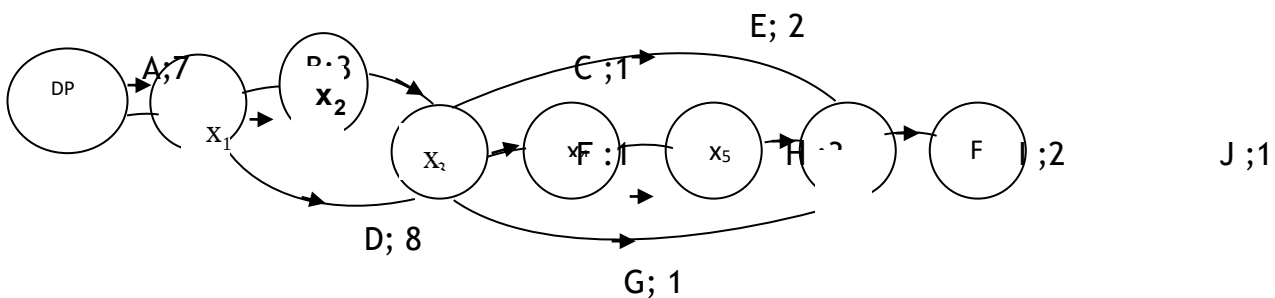


- La tâche J est précédée par les tâches E, G et I

Représentation graphique :



La tâche J ne précède aucune tâche, sa fin coïncide avec la fin du projet FP : d'où le graphe Pert suivant :



III RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :

Après la représentation du problème d'ordonnancement par un graphe, vient l'étape de résolution. Rappelons que la résolution d'un problème d'ordonnancement consiste à déterminer l'ordre d'exécution des diverses tâches en un temps minimal, en d'autres termes, elle consiste à trouver sur le graphe qui le représente (graphe potentiel- tâches ou potentiel-étapes Pert) ce qu'on appellera un chemin critique.

Pour calculer le chemin critique, nous devons d'abord connaître les dates au plus tôt et au plus tard des tâches et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes.

1- Les dates au plus tôt et au plus tard des tâches :

a- Les dates au plus tôt : Une date au plus tôt pour l'exécution d'une tâche i est une date avant laquelle il est impossible d'exécuter la tâche i , elle est notée t_i .

Exemple : Dans le projet de construction d'un pavillon ; la tâche A n'est précédée par aucune tâche, la date au plus tôt pour commencer A est 0, mais B est précédée par A, donc on ne peut commencer la tâche B que si A est terminée c'est-à-dire après 7 semaines, la date au plus tôt pour commencer B est 7, et la date au plus tôt pour la finir est $7 + (\text{durée de B} = 3) = 10$, la tâche C, elle est précédée par B, la date au plus tôt pour commencer C est la date au plus tôt pour finir B c'est-à-dire 10. La tâche D est précédée par A, alors comme la tâche B, on ne peut commencer à exécuter D que si la tâche A est achevée c'est-à-dire après 7 semaines la date au plus tôt pour le début de la tâche D est 7, la date au plus tôt pour son achèvement est $7 + \text{durée de la tâche D} = 15$ semaines, de même la date au plus tôt pour la fin de la tâche C est $10 + \text{durée de la tâche C} = 10 + 1 = 11$ semaines.

Que se passe-t-il si une tâche est précédée par deux ou plusieurs tâches ? Et comment calculer la date au plus tôt de son début ? Prenons le cas de la tâche E :

L'exécution de la tâche E, nécessite l'achèvement de la tâche C et de la tâche D. Donc on ne peut commencer l'exécution de E que si les deux tâches C et D sont achevées. Sachant que l'achèvement de la tâche C aura lieu au plus tôt à la 11^{ème} semaine et celui de D aura lieu au plus tôt à la 15^{ème} semaine, on ne peut commencer alors l'exécution de E qu'à la 15^{ème} semaine d'où la date au plus tôt de la fin de la tâche E est $15 + \text{durée de E} = 15 + 2 = 17$ semaines.

Résultats :

- 1- Si une tâche i est précédée par deux ou plusieurs tâches, la date au plus tôt pour le début de son exécution est la plus grande date au plus tôt pour la fin des tâches qui doivent la précéder.
- 2- La date au plus tôt pour la fin d'une tâche i est la date au plus tôt pour son début + durée de la tâche i
- 3- La date au plus tôt pour commencer une tâche qui n'est précédée par aucune autre tâche est égale à 0.

Remarque : Les trois résultats précédents nous permettent de calculer les dates au plus tôt pour le début et la fin de toutes les tâches d'un projet.

b- Les dates au plus tard : La date au plus tard pour le début de l'exécution d'une tâche i est une date à laquelle on peut commencer l'exécution, mais après laquelle le début de l'exécution entraînera un retard de la fin du projet, elle est notée T_i . Le calcul des dates au plus tard se fait par récurrence :

La date au plus tard du début d'une tâche i est égale à la plus petite différence entre la date au plus tard des tâches qui la succèdent est la durée de la tâche i .

La date au plus tard de la fin d'une tâche i est égale à la plus petite date au plus tard des tâches qui la succèdent.

c- La marge totale : Elle est égale à la différence entre les dates au plus tôt et au plus tard, elle représente le temps de retard que peut prendre une tâche sans influencer sur le reste du parcours.

Remarques :

1- La date au plus tard de la tâche FP (Fin du projet) est égale à la date au plus tôt de cette tâche : $T_{FP} = T_{FP}$.

2- Une tâche dont la marge totale est nulle est appelée une tâche critique.

3- Un chemin critique est le chemin qui passe par les tâches critiques, c'est aussi un chemin sur lequel aucun retard n'est Permis.

Notations : On notera par :

- Td_i la date au plus tôt pour le début de la tâche i .
- tf_i la date au plus tôt pour la fin de la tâche i .
- Td_i la date au plus tard pour le début de la tâche i .
- Tf_i la date au plus tard pour la fin de la tâche i .
- d_i la durée d'une tâche i .

Exemple : La tâche E est précédée par C et D donc $td_E = \text{Max} (tf_C, tf_D)$.
 $= \text{Max} (11, 15) = 15$.

La date au plus tôt pour la fin d'une tâche précédée par deux ou plusieurs tâches est calculée de la même façon que pour la fin d'une tâche qui n'est précédée que par une seule tâche ; c'est-à-dire $tf_i = td_i + d_i$

Exemple : $tf_E = td_E + d_E = 15 + 2 = 17$.

Continuons les calculs des dates au plus tôt pour le reste des tâches :

$$td_F = \text{Max} (tf_C, tf_D) = \text{Max} (11, 15) = 15 ; tf_F = 15 + d_F = 15 + 1 = 16.$$

$$td_G = \text{Max} (tf_C, tf_D) = \text{Max} (11, 15) = 15 ; tf_G = td_G + d_G = 15 + 1 = 16.$$

$$td_H = tf_F = 16 ; tf_H = td_H + d_H = 16 + 3 = 19.$$

$$td_I = tf_H = 19 ; tf_I = td_I + d_I = 19 + 2 = 21$$

$$td_J = \text{Max} (tf_E, tf_G, tf_I) = \text{Max} (17, 16, 21) = 21 ; tf_J = td_J + d_J \\ = 21 + 1 = 22$$

$$td_{FP} = tf_J = 22 ; tf_{FP} = 22$$

Calcul des dates au plus tard :

$$Td_{FP} = 22 ; Tf_{FP} = 22$$

$$Td_J = Td_{FP} - d_j = 22 - 1 = 21 ; Tf_J = Td_{FP} = 22$$

$$Td_I = Td_J - d_I = 21 - 2 = 19 ; Tf_I = Td_J = 21$$

$$Td_H = Td_I - d_H = 19 - 3 = 16 ; Tf_H = Td_I = 19$$

$$Td_G = Td_J - d_G = 21 - 1 = 20 ; Tf_G = Td_J = 21$$

$$Td_F = Td_H - d_F = 16 - 1 = 15 ; Tf_F = Td_H = 16$$

$$Td_E = Td_J - d_E = 21 - 2 = 19 ; Tf_E = Td_J = 21$$

$$Td_D = \text{Min} (Td_E, Td_F, Td_G) - d_D = \text{Min} (19, 15, 20) - 8 = 15 - 8 = 7$$

$$Tf_D = \text{Min} (Td_E, Td_F, Td_G) = 15$$

$$Td_C = \text{Min} (Td_E, Td_F, Td_G) - d_C = \text{Min} (19, 15, 20) - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$Tf_C = \text{Min} (Td_E, Td_F, Td_G) = 15$$

$$Td_B = Td_C - d_B = 14 - 3 = 11 ; Tf_B = Td_C = 14$$

$$Td_A = \text{Min} (Td_B, Td_D) - d_A = \text{Min} (11, 7) - 7 = 7 - 7 = 0 ;$$

$$Tf_A = \text{Min} (Td_B, Td_D) = 7.$$

$$Td_{DP} = Td_A - d_{FP} = 0 ; Tf_{DP} = Td_A = 0$$

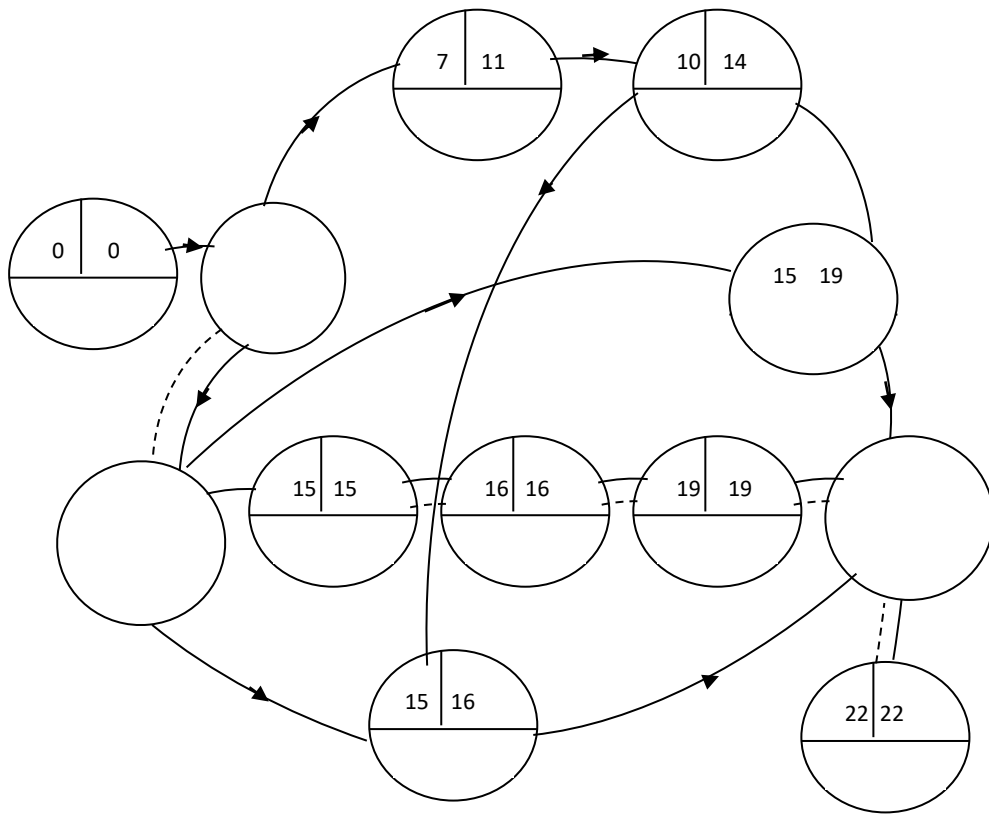
Ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

Tâches	Date au plus tôt		Date au plus tard		Marge totale
	Début	Fin	Début	Fin	
Dp	0	0	0	0	0
A	0	$0+7=7$	$7-7=0$	$\text{Min } (7,11) = 7$	$0-0 = 0$
B	7	$7+3=10$	$14-3=11$	14	$11-7 = 4$
C	10	$10+1=11$	$15-1=14$	$\text{Min } (19,15,20)=15$	$14-10 = 4$
D	7	$7+8=15$	$15-8=7$	$\text{Min } (19,15,20)=15$	$7-7 = 0$
E	$\text{Max } (11,15) = 15$	$15+2=17$	$21-2=19$	21	$19-15 = 4$
F	$\text{Max } (11,15) = 15$	$15+1=16$	$16-1=15$	16	$15-15 = 0$
G	$\text{Max } (11,15) = 15$	$15+1=16$	$21-1=20$	21	$20-15 = 5$
H	16	$16+3=19$	$19-3=16$	19	$16-16 = 0$
I	19	$19+2=21$	$21-9=19$	21	$19-19 = 0$
J	$\text{Max } (17, 16,21) = 21$	$21+1=22$	21	22	$21-21 = 0$
FP	22	22	22	22	$22-22=0$

Remarque : Les tâches DP, A, D, F, H, I, J, FP sont des tâches critiques car leurs marges sont nulles.

On reporte ces résultats sur le graphe de la manière suivante :

- Sur chaque sommet (qui représente une tâche) ; on inscrit sur la droite la date au plus tard pour le début de la tâche et sur la gauche la date au plus tôt pour le début de la tâche.
- On marque le chemin critique par des traits discontinus ; rappelons que le chemin critique est un chemin qui passe par les tâches critiques.



Par le calcul de ces dates au plus tôt et au plus tard on a résolu le problème d'ordonnement associé au projet de construction d'un pavillon, la durée minimale d'exécution de ce projet est 22 semaines, c'est-à-dire qu'on ne peut exécuter ce projet en moins de 22 semaines.

L'ordre des tâches critiques décrit le calendrier des tâches à exécuter sans possibilité de les avancer ou de les retarder est : DP, A, D, F, H, I, J, FP, c'est le chemin critique.

Les tâches B, C, E et G ont des périodes de flottement :

Exemple : Le début d'exécution de la tâche E peut être retardé au maximum jusqu'à la 14^{ème} semaine et cela sans retarder la fin du projet.

2 - Les dates au plus tôt et au plus tard des étapes :

a- Date au plus tôt d'une étape : La date au plus tôt d'une étape i est égale à la plus grande durée d'exécution des étapes qui la précèdent, on la notera t_i .

Exemple : Dans la représentation par la méthode Pert du projet de construction d'un pavillon, il y a les étapes suivantes :

L'étape DP, l'étape 1 notée x_1 , l'étape 2 notée x_2 ,etc.

On a $t_{DP} = 0$, $t_{x_1} = t_{DP} + 7 = 7$;

$t_{x_2} = t_{x_1} + l(x_1, x_2) = 7 + 3 = 10$.

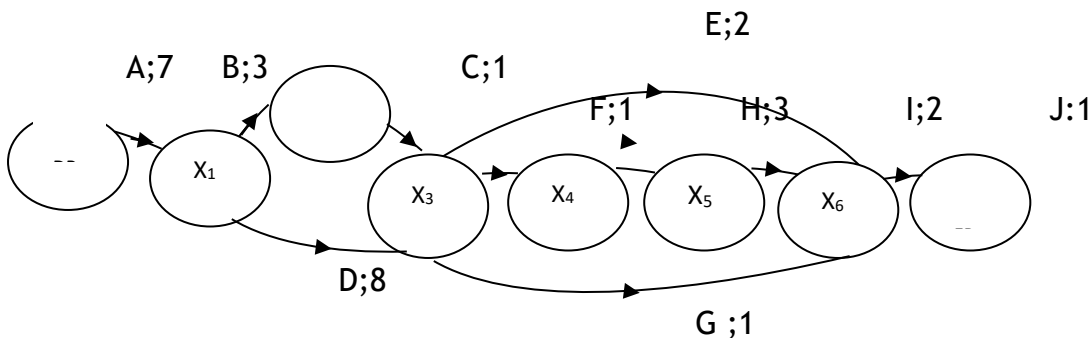
Remarque : $l(x_1, x_2) = \text{longueur de l'arc } (x_1, x_2) = d(B) = 3$

b- Date au plus tard d'une étape : La date au plus tard pour l'exécution d'une étape i est calculée par récurrence, elle est égale à la plus petite différence entre les dates au plus tard et les durées des tâches qui lui succèdent, elle est notée T_i

Application :

Soit le projet de construction d'un pavillon et sa représentation par la méthode Pert ; calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour l'exécution de chaque étape ainsi que leurs marges.

Solution : À partir de la représentation par la méthode Pert du projet, on a obtenu le graphe suivant :



Remarque :

1- Pour tout problème d'ordonnancement on a : $t_{FP} = t_{FP}$

2- Pour tout problème d'ordonnancement on a : $t_{DP} = 0$

Calcul des dates au plus tôt :

L'étape DP, par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(A) = 0 + 7 = 7$

L'étape x_2 : $tx_2 = tx_1 + d(B) = 7 + 3 = 10$

L'étape x_3 : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(D) ; tx_2 + d(C))$
 $= \text{Max}(7 + 8 ; 10 + 1) = \text{Max}(15, 11) = 15$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_3 + d(F) = 15 + 1 = 16$

L'étape x_5 : $tx_5 = tx_4 + d(H) = 16 + 3 = 19$

L'étape x_6 : $tx_6 = \text{Max}(tx_3 + d(E) ; tx_4 + d(G) ; tx_5 + d(I))$
 $= \text{Max}(15 + 2, 16 + 1 ; 19 + 2) = \text{Max}(17, 16, 21) = 21$

L'étape FP : $t_{FP} = tx_6 + d(J) = 21 + 1 = 22$

Calcul des dates au plus tard :

Pour l'étape FP on a par définition : $T_{FP} = t_{FP} = 22$

Pour l'étape x_6 : $Tx_6 = T_{FP} - d(J) = 22 - 1 = 21$

Pour l'étape x_5 : $Tx_5 = Tx_6 - d(I) = 21 - 2 = 19$

Pour l'étape x_4 : $Tx_4 = Tx_5 - d(H) = 19 - 3 = 16$

Pour l'étape x_3 : $Tx_3 = \text{Min}(Tx_4 - d(F) ; Tx_6 - d(E) ; Tx_6 - d(G))$

$$= \text{Min} (16-1, 21-2, 21-1) = \text{Min} (15, 19, 20) = 15$$

Pour l'étape x_2 : $T_{x_2} = T_{x_3} - d(C) = 15 - 1 = 14$

Pour l'étape x_1 : $T_{x_1} = \text{Min} (T_{x_3} - d(D) ; T_{x_2} - d(B))$

$$= \text{Min} (15 - 8 ; 14 - 3) = \text{Min} (7 ; 11) = 7$$

Pour l'étape DP : $T_{DP} = T_{x_1} - d(A) = 7 - 7 = 0$

Ces calculs sont résumés dans le tableau suivant :

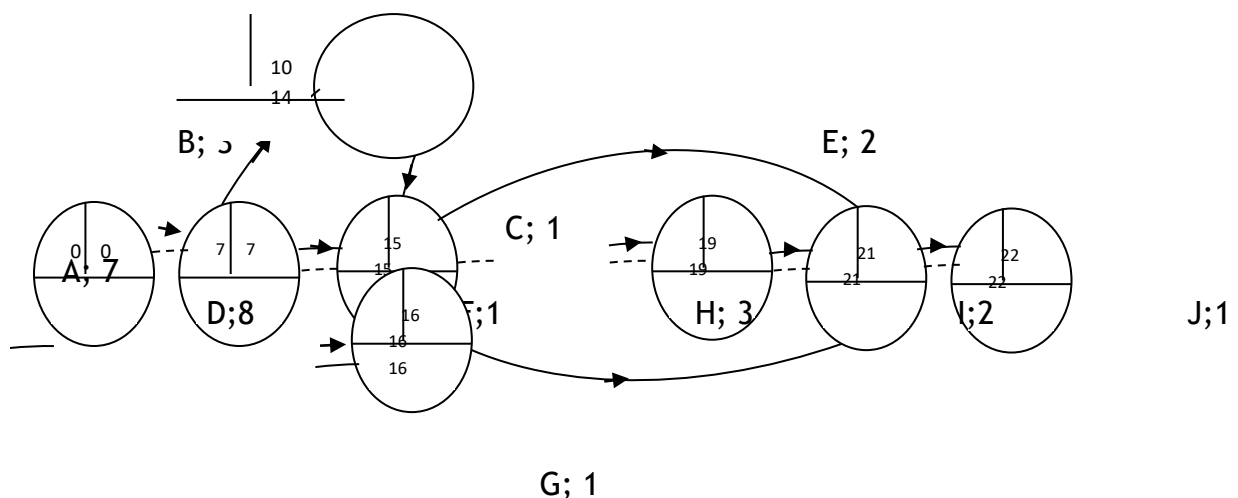
Étapes	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x_1	7	7	$7 - 7 = 0$
x_2	10	14	$14 - 10 = 4$
x_3	15	15	$15 - 15 = 0$
x_4	16	16	$16 - 16 = 0$
x_5	19	19	$19 - 19 = 0$
x_6	21	21	$21 - 21 = 0$
FP	22	22	$22 - 22 = 0$

Remarque : Les étapes DP, x_1 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 et FP sont des étapes critiques car leurs marges sont nulles.

On reporte les résultats du calcul sur le graphe de Pert de la manière suivante :

- Sur chaque sommet (qui représente une étape), on inscrit sur la droite la date au plus tard et sur la gauche la date au plus tôt.

- On marque le chemin critique par des traits discontinus ; dans ce cas le chemin critique est un chemin qui passe par les étapes critiques.



Comme pour la représentation par le graphe potentiel-tâches, le calcul des dates au plus tôt et au plus tard des étapes, dans une représentation par la méthode Pert permet aussi de résoudre le problème d'ordonnancement.

On remarque qu'on obtient les mêmes résultats, c'est-à-dire, la même durée minimale (22 semaines) et le même chemin critique : DP, x_1 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , FP, et si au lieu de décrire ce chemin par les sommets on utilise les arcs (qui dans cette méthode représente les tâches) on obtient : A, D, F, H, I, J : les mêmes tâches critique trouvées dans la première représentation graphique.

Remarque : Relation entre les dates au plus tôt et au plus tard du début d'une tâche et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes :

- La date de début au plus tôt d'une tâche est égale à la date au plus tôt de l'étape dont elle est issue.

- La date de début au plus tard d'une tâche est égale à la date au plus tard de l'étape à laquelle elle aboutit, diminuée de la durée de la tâche.

A partir de cette remarque, vous pouvez calculer les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches en utilisant le graphe de Pert et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes.

IV - CONCLUSION :

Nous avons défini la notion de Projet, de tâches, et de Problème Centrale d'Ordonnancement, ces notions restent applicables dans plusieurs domaines : construction, production, organisation des activités et même les opérations militaires où la méthode Pert a été créée et utilisée pour la première fois.

Nous avons aussi proposé des méthodes pour sa représentation et sa résolution (Problème Central d'Ordonnancement) essentiellement la méthode Pert qui donne entière satisfaction et assure une réussite complète du projet.

EXERCICES CORRIGES :

EXERCICE N° 1 :

Désirant fabriquer un produit, on dispose des informations suivantes :

Tâches	Description	Durée (en j)	Tâches antérieures
A	Préparer la liste des matières premières nécessaires	1	/
B	Préparer le diagramme de fabrication	3	A
C	Commander les matières premières	4	A
D	Organiser la chaîne de production	2	B
E	Tester le fonctionnement	1	C,D
F	Définir les procédures d'inspection	1	B
G	Établir les postes d'inspection	2	E,F
H	Former les ouvriers	4	C,D
I	Fabriquer les produits	7	G,H

1- Représenter ce projet par le graphe potentiel-tâches.

2- Donner la représentation par le graphe Pert.

3- Calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape, et en déduire le chemin critique et le délai minimum de réalisation de ce projet.

EXERCICE N° 2 :

Soit un projet constitué de 6 tâches, les données relatives à l'antériorité et à la durée de chacune des tâches sont répertoriées dans le tableau suivant :

Tâches	A	B	C	D	E	F
Tâches antérieures	C	-	-	B	B,A	D
Durées (en mois)	2	7	5	3	6	2

1- Déterminer les niveaux des tâches du projet.

2- Tracer le graphe Pert associé à ce projet.

3- Déterminer le chemin critique et les tâches critiques.

EXERCICE N° 3 :

L'entreprise « Bontemps » décide de lancer un nouveau produit sur le marché, les services commerciaux ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action : {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K}.

Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées de celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K
T. Antérieures	E	J,E	-	-	-	D	F,D	A,C,D	H,A,C,E,K,D,F	E	F,D
Durée(en semaines)	4	6	12	14	8	2	10	6	8	12	2

1-En classant les tâches par niveaux, déterminer les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.

Exemple : La tâche B est précédée par J et E, mais J elle-même est précédée par E, donc seule la tâche J est immédiatement antérieure à B.

2- Tracer le graphe du projet par la méthode Pert.

3- Trouver le ou les chemin (s) critique (s) en indiquant sur le graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard des étapes.

4 - Les services commerciaux aimeraient connaître en quel temps minimum le lancement sera réalisé.

Déterminer le temps minimum nécessaire pour le lancement.

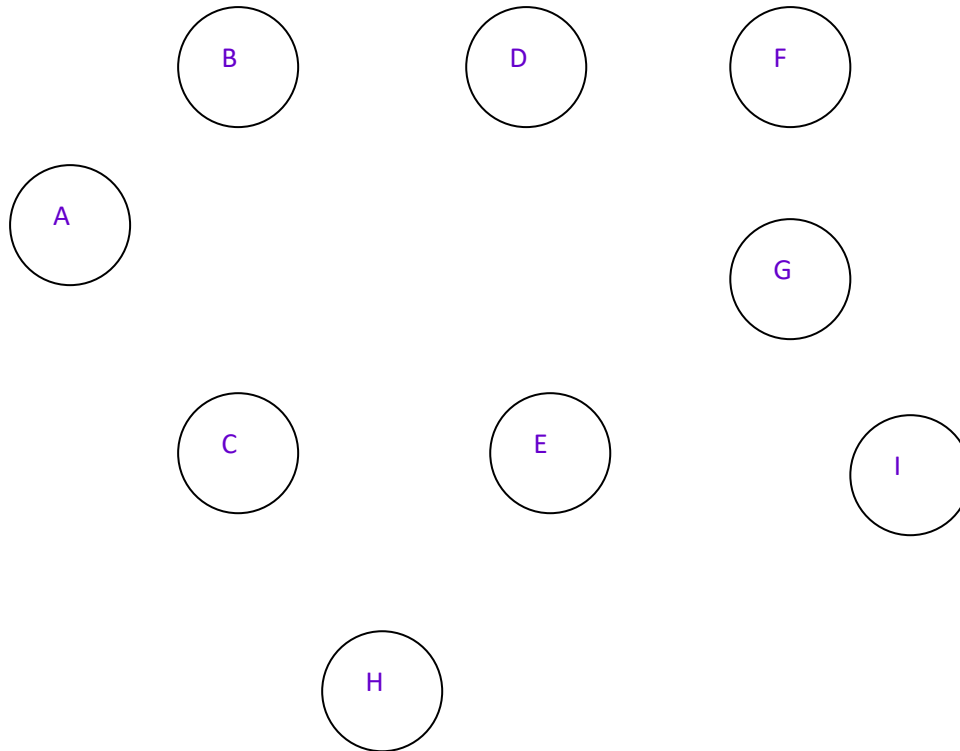
5 - Dresser le tableau des marges totales.

SOLUTIONS :

EXERCICE N° 1 :

1- Représentation du projet par le graphe potentiel-tâches :

Le graphe contient les sommets suivants :



Les arcs et leurs longueurs sont obtenus en utilisant : les tâches antérieures et les durées :

La tâche B nécessite la tâche A : le graphe contient un arc du sommet A vers B et sa longueur et la durée de A.

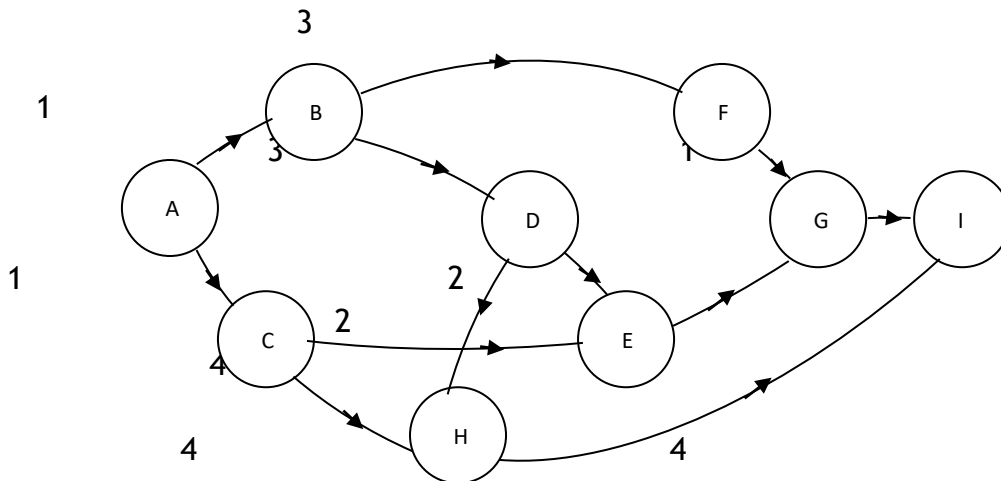
La tâche C aussi nécessite la tâche A alors le graphe contient un arc du sommet A au sommet C, sa longueur est alors 1. La tâche D nécessite la tâche B, alors le graphe contient un arc du sommet B au sommet D, sa longueur est 3 (durée de la tâche B).

La tâche E nécessite les tâches C et D alors le graphe contient deux arcs :

- Du sommet C au sommet E, sa longueur est 4 (durée de la tâche C) .
- Du sommet D au sommet E, sa longueur est 2 (durée de la tâche D).
- La tâche F nécessite la tâche B, alors le graphe contient un arc du sommet B au sommet F sa longueur est 3 (durée de la tâche B).
- La tâche G nécessite les tâches E et F, le graphe contient deux arcs :
 - Du sommet E au sommet G, sa longueur est 1 (durée de la tâche E).
 - Du sommet F au sommet G, sa longueur est 1 (durée de la tâche F).
- La tâche H nécessite les tâches C et D alors le graphe contient deux arcs :

- Du sommet C au sommet H, sa longueur est 4 (durée de la tâche C).
- Du sommet D au sommet H, sa longueur est 2 (durée de la tâche D).
- La tâche I nécessite les tâches G et H alors le graphe contient deux arcs :
 - Du sommet G au sommet I, sa longueur est 2 (durée de la tâche G).
 - Du sommet H au sommet I, sa longueur est 4 (durée de la tâche H).

Ainsi, on obtient le graphe suivant :



On remarque que la durée de la tâche I ne figure pas sur le graphe. Ce dernier n'exprime pas complètement le projet. Le rajout des deux sommets DP et FP va nous permettre de compléter cette représentation.

D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est antérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet DP à tous les sommets sans précédents. Dans notre cas, il y a un seul c'est le sommet A).

D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est postérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet FP à tous les sommets sans successeurs. Dans notre cas, il y a un seul et c'est le sommet I.

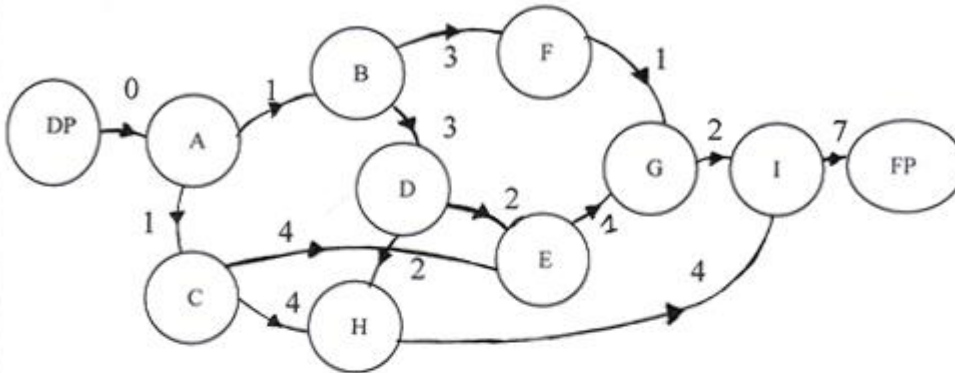
Au graphe ci-dessus, on rajoute alors :

- Deux sommets : DP et FP.
- Deux arcs : de DP vers A de longueur 0 (durée de DP).
de I vers FP de longueur 7 (durée de la tâche I)

Enfin, on obtient le graphe suivant

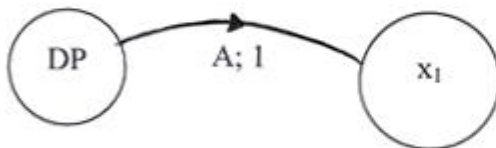
56

Enfin, on obtient le graphe suivant :



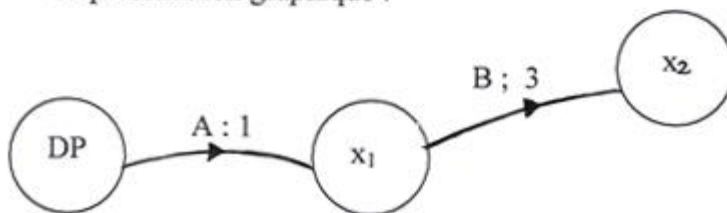
2 – La représentation par le graphe Pert :

La tâche A ne nécessite l'exécution d'aucune tâche, donc le début de la tâche A coïncide avec le début du projet noté DP :



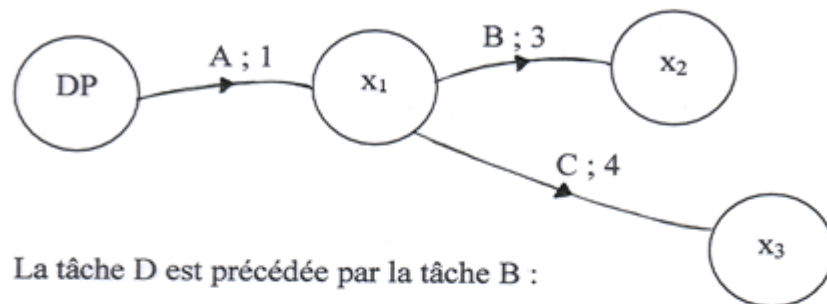
La tâche B est précédée par A :

Représentation graphique :



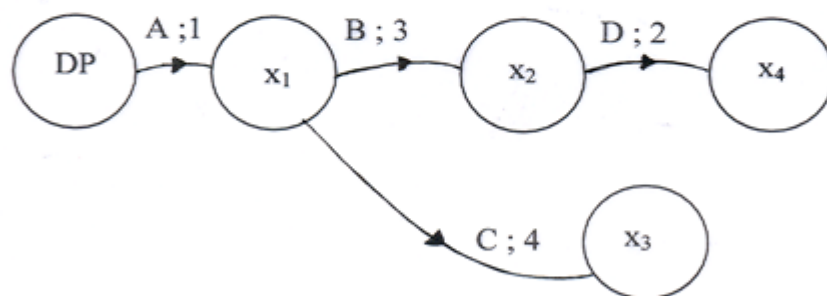
La tâche C est aussi précédée par A :

Représentation graphique :



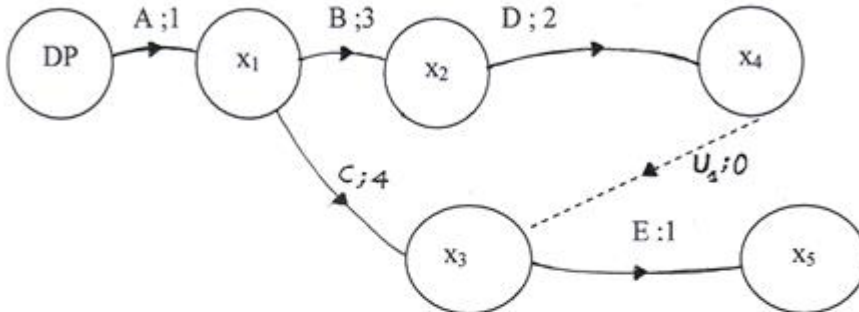
La tâche D est précédée par la tâche B :

Représentation graphique :

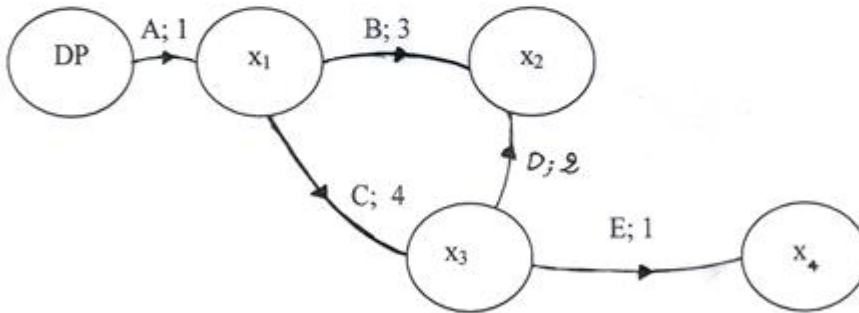


La tâche E nécessite C et D :

Représentation graphique :

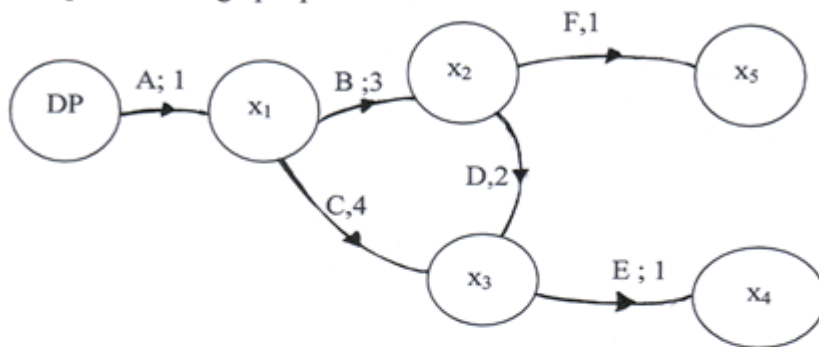


La tâche U_0 est une tâche fictive ; qui peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



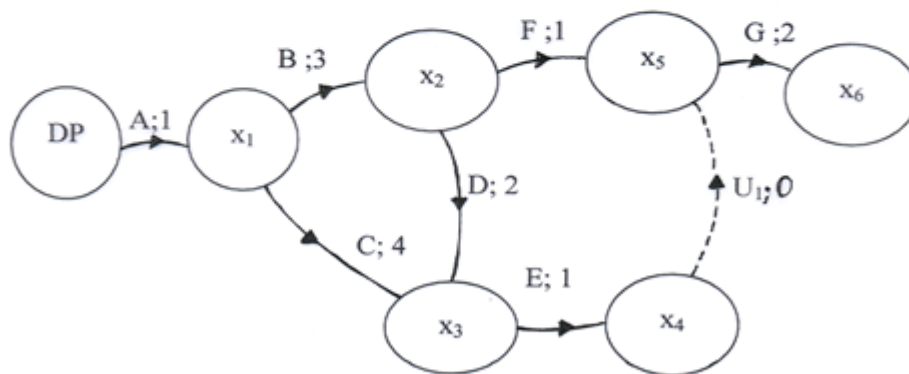
La tâche F nécessite la tâche B :

Représentation graphique :

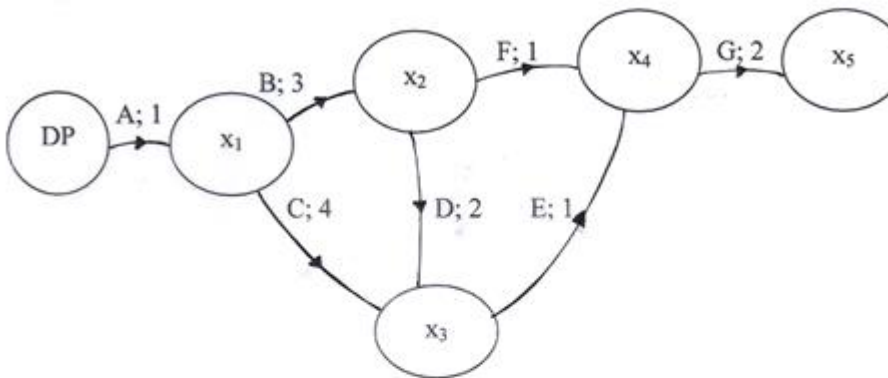


La tâche G nécessite E et F :

Représentation graphique :

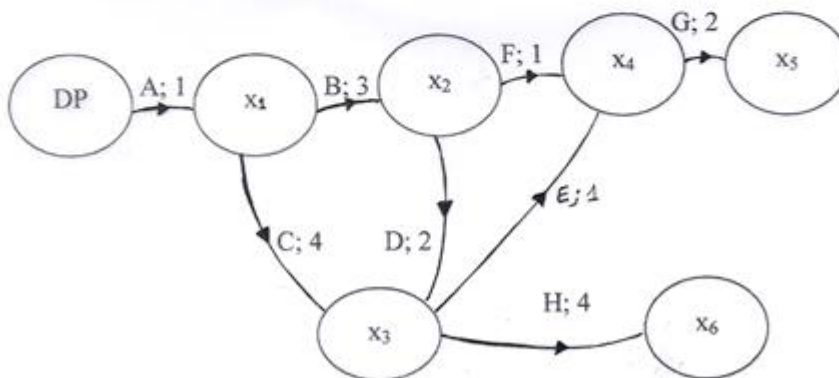


La tâche U_1 est une tâche fictive qui peut supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



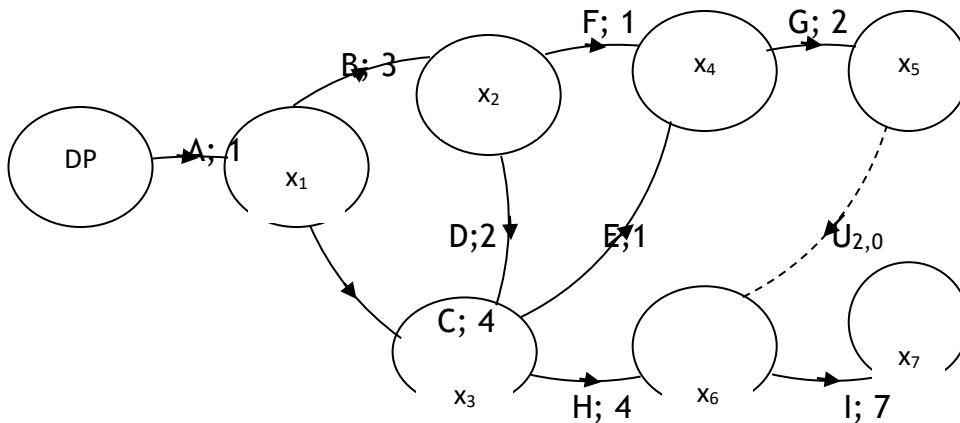
La tâche H nécessite C et D :

Représentation graphique :

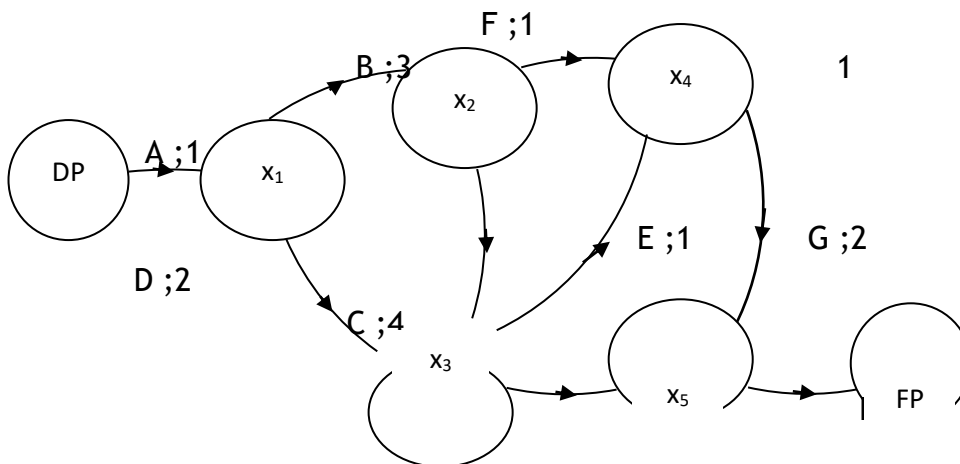


Enfin, la tâche I, nécessite G et H :

Représentation graphique :



La tâche U₂ est une tâche fictive qui peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



3- Calcul des dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape :

Les dates au plus tôt :

L'étape DP : par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x₁ : $tx_1 = t_{DP} + d(A) = 0 + 1 = 1$

L'étape x₂ : $tx_2 = tx_1 + d(B) = 1 + 3 = 4$

L'étape x₃ : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(C), tx_2 + d(D))$

$$= \text{Max}(1 + 4, 4 + 2) = \text{Max}(5, 6) = 6$$

L'étape x₄ : $tx_4 = \text{Max}(tx_2 + d(F), tx_3 + d(E))$

$$= \text{Max}(4 + 1, 6 + 1) = \text{Max}(5, 7) = 7$$

$$\begin{aligned}\text{L'étape } x_5 : tx_5 &= \text{Max} (tx_4 + d (G), tx_3 + d (H)) \\ &= \text{Max} (7 + 2, 6 + 4) = 10\end{aligned}$$

$$\text{L'étape FP : } t_{FP} = tx_5 + d (I) = 10 + 7 = 17 \text{ jours.}$$

Le délai minimum du projet est 17 jours.

Les dates au plus tard :

$$\text{L'étape FP : on a par définition } T_{FP} = t_{FP} = 17$$

$$\text{Pour l'étape } x_5 : Tx_5 = T_{FP} - d (I) = 17 - 7 = 10$$

$$\text{Pour l'étape } x_4 : Tx_4 = Tx_5 - d (G) = 10 - 2 = 8$$

$$\begin{aligned}\text{Pour l'étape } x_3 : Tx_3 &= \text{Min} (Tx_5 - d (H), Tx_4 - d (E)) \\ &= \text{Min} (10 - 4, 8 - 1) = \text{Min} (6, 7) = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pour l'étape } x_2 : Tx_2 &= \text{Min} (Tx_3 - d (D), Tx_4 - d (F)) \\ &= \text{Min} (6 - 2, 8 - 1) = \text{Min} (4, 7) = 4\end{aligned}$$

Pour l'étape x_1 : $T_{x_1} = \text{Min} (T_{x_2} - d(B), T_{x_3} - d(C))$
 $= \text{Min} (4 - 3, 6 - 4) = \text{Min} (1, 2) = 1$

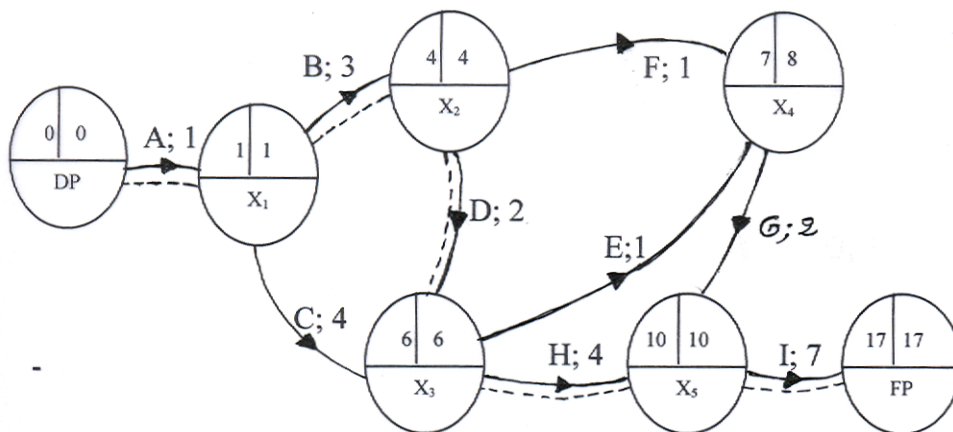
Pour l'étape DP : $T_{DP} = T_{x_1} - d(A) = 1 - 1 = 0$

Ces calculs sont résumés dans le tableau suivant :

Étapes	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x_1	1	1	$1 - 1 = 0$
x_2	4	4	$4 - 4 = 0$
x_3	6	6	$6 - 6 = 0$
x_4	7	8	$8 - 7 = 1$
x_5	10	10	$10 - 10 = 0$
FP	17	17	$17 - 17 = 0$

Les étapes DP, x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , et FP sont des étapes critiques car leurs marges sont nulles.

Le chemin critique est : DP, x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , FP. Il est marqué par des traits discontinus dans le graphe suivant :



EXERCICE N°2 :

1 - Détermination des niveaux : Les tâches B et C n'ont pas de tâches antérieures, ce sont les tâches de premier niveau :

$$N_1 = \{B, C\}$$

On supprime ces 2 tâches du tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
A	/
D	/
E	A
F	D

D'où $N_2 = \{A, D\}$, En les supprimant de ce tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
E	/
F	/

E et F sont les tâches de dernier niveau, $N_3 = \{E, F\}$

Les niveaux sont résumés par :

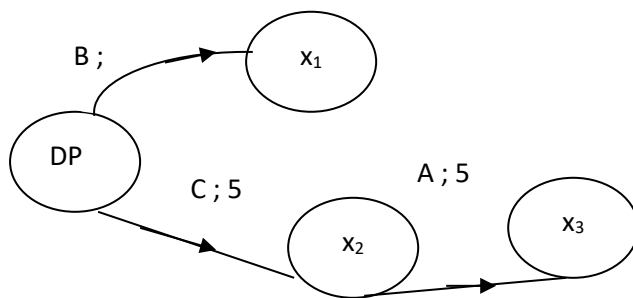
$$N_1 = \{B, C\}$$

$$N_2 = \{A, D\}$$

$$N_3 = \{E, F\}$$

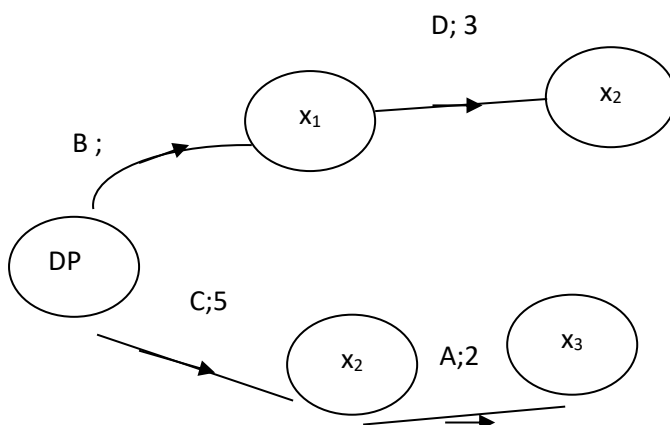
La tâche A nécessite la tâche C :

Représentation graphique :



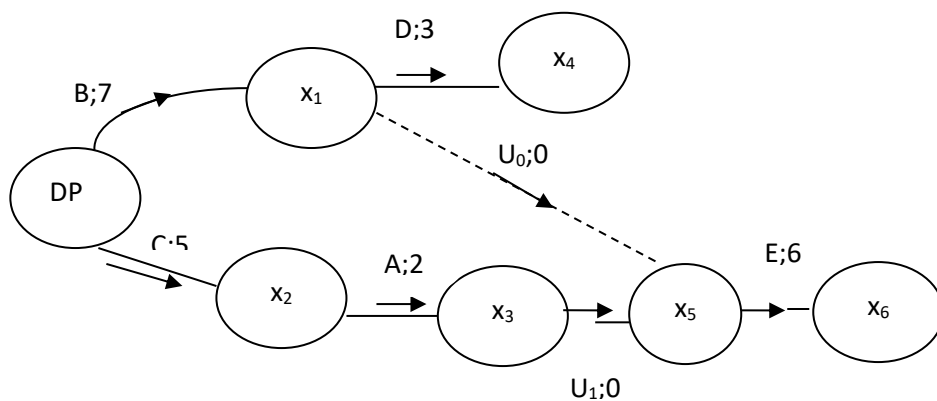
La tâche D nécessite la tâche B :

Représentation graphique :

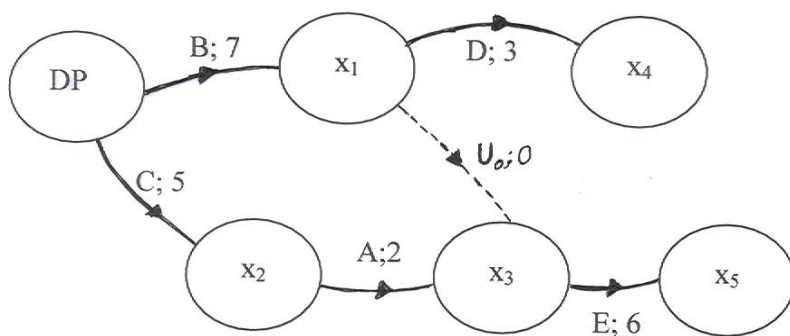


La tâche E nécessite B et A :

Représentation graphique :

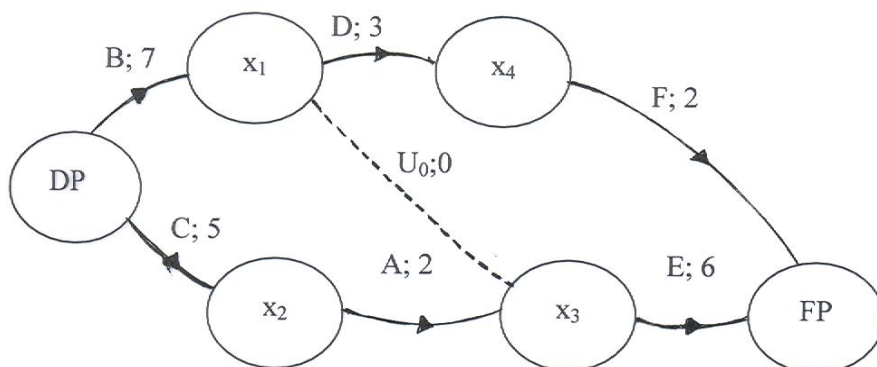


Les tâches U0 et U1 sont des tâches fictives, mais seulement la tâche U1 peut être supprimée. U0 ne peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



F, la dernière tâche nécessite D :

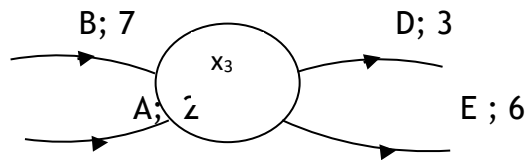
Représentation graphique :



Remarques :

1- La tâche U_0 n'a pas été supprimé car : E nécessite B et A mais la tâche D ne nécessite que la tâche B. Si on fait aboutir les arcs A et B vers un même sommet, on ne peut pas exprimer le fait que D nécessite B.

La représentation suivante :



Exprime que D nécessite A et B, et E aussi, ce qui n'est pas le cas.

2 - On a fait aboutir les arcs E et F vers le même sommet, car les tâches correspondantes (c'est-à-dire E et F) ne sont antérieures à aucune des autres tâches, elles coïncident alors avec la fin du projet FP.

3 - Détermination du chemin critique et les tâches critiques :

Pour déterminer le chemin critique, on doit d'abord calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape :

Les dates au plus tôt :

L'étape DP : par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(B) = 0 + 7 = 7$

L'étape x_2 : $tx_2 = t_{DP} + d(C) = 0 + 5 = 5$

L'étape x_3 : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(U_0), tx_2 + d(A)) = \text{Max}(7 + 0, 5 + 2)$
 $= \text{Max}(7, 7) = 7$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_1 + d(D) = 7 + 3 = 10$

L'étape FP : $t_{FP} = \text{Max}(tx_4 + d(F), tx_3 + d(E))$
 $= \text{Max}(10 + 2, 7 + 6) = 13$

Les dates au plus tard :

L'étape FP : $t_{FP} = t_{FP} = 13$

L'étape x_4 : $tx_4 = t_{FP} - d(F) = 13 - 2 = 11$

L'étape x_3 : $tx_3 = t_{FP} - d(E) = 13 - 6 = 7$

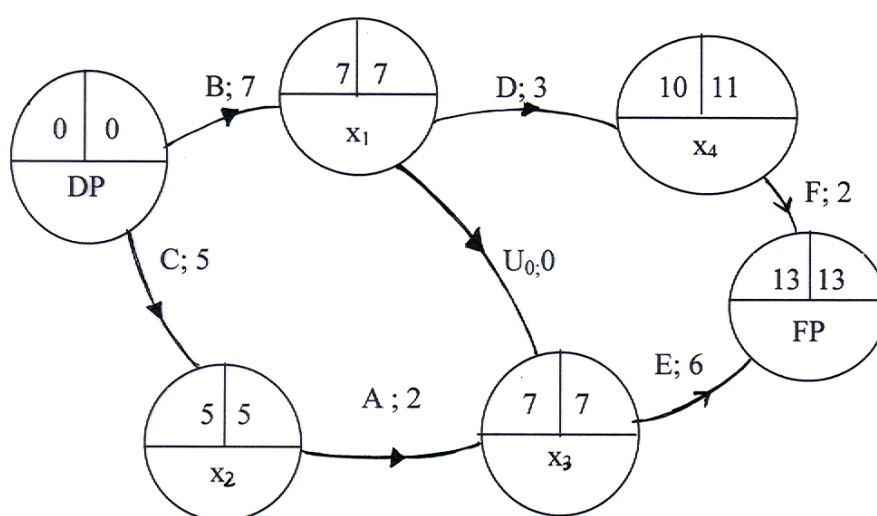
L'étape x_2 : $tx_2 = tx_3 - d(A) = 7 - 2 = 5$

L'étape x_1 : $tx_1 = \text{Min}(tx_3 - d(U_0), tx_4 - d(D))$
 $= \text{Min}(7 - 0, 11 - 3) = \text{Min}(7, 8) = 7$

L'étape DP : $t_{DP} = \text{Min}(tx_1 - d(B), tx_2 - d(C))$
 $= \text{Min}(7 - 7, 5 - 5) = \text{Min}(0, 0) = 0$

On résume ces calculs dans le tableau suivant :

Etape	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marges
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x ₁	7	7	$7 - 7 = 0$
x ₂	5	5	$5 - 5 = 0$
x ₃	7	7	$7 - 7 = 0$
x ₄	10	11	$11 - 10 = 1$
FP	13	13	$13 - 13 = 0$



Il existe donc deux chemins critiques :

1- DP, x₁, x₃, FP

2- DP, x₂, x₃, FP

EXERCICE N° 3 :

1- Détermination des tâches immédiatement antérieures à chaque tâche :

D'après le tableau :

Les tâches C, D et E n'ont pas de tâches antérieures, leur suppression du tableau permet d'obtenir le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
A	/
B	J
F	/

G	F
H	A
I	H, A, F, K
J	/
K	F

$$N_1 = \{C, D, E\}, N_2 = \{A, F, J\}$$

En supprimant les tâches A, F, et J de ce tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
B	/
G	/
H	/
I	H, K
K	/

$$D'où N_3 = \{B, G, H, K\}.$$

La suppression des tâches B, G, H et K du tableau permet d'obtenir le dernier niveau $N_4 = \{I\}$

Les niveaux sont les suivants :

$$N_1 = \{C, D, E\}$$

$$N_2 = \{A, F, J\}$$

$$N_3 = \{B, G, H, K\}$$

$$N_4 = \{I\}$$

A partir de cette détermination de niveau, on détermine les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
T. antérieures	E	J	/	/	/	D	F	A, C, D	H, K	E	F

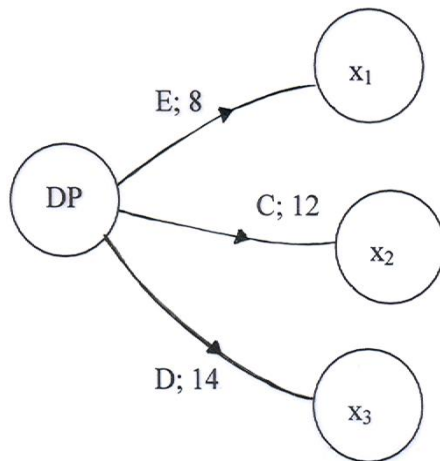
- G nécessite F et D mais la tâche F elle-même nécessite D, d'où G nécessite F seulement.
- H nécessite A, C et D, ces 3 tâches ne sont pas liées entre elles, on ne peut pas simplifier

- I nécessite H, A, C, E, K, D, F : Mais la tâche H nécessite A, C et D et A elle-même nécessite E, on peut déduire que la tâche I nécessite seulement H, K et F, mais K nécessite F, d'où I nécessite seulement H et K.

- K nécessite F et D ; mais F nécessite D d'où K nécessite seulement la tâche F.

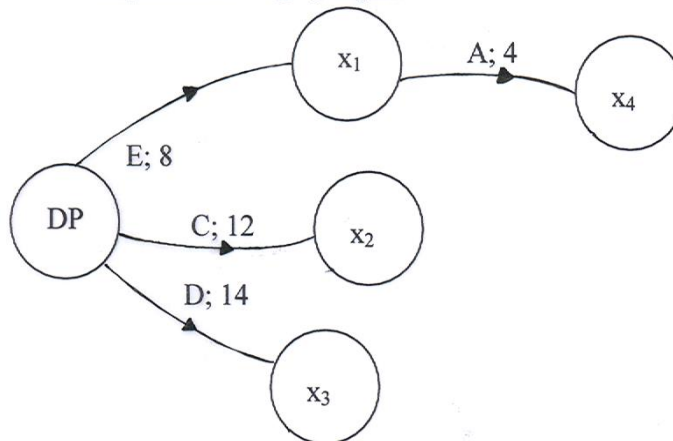
2 – La représentation graphique par la méthode Pert :

Les tâches C, D et E ne nécessitent aucune autre tâche , elles coïncident avec le début du projet DP :



La tâche A nécessite E :

Représentation graphique :

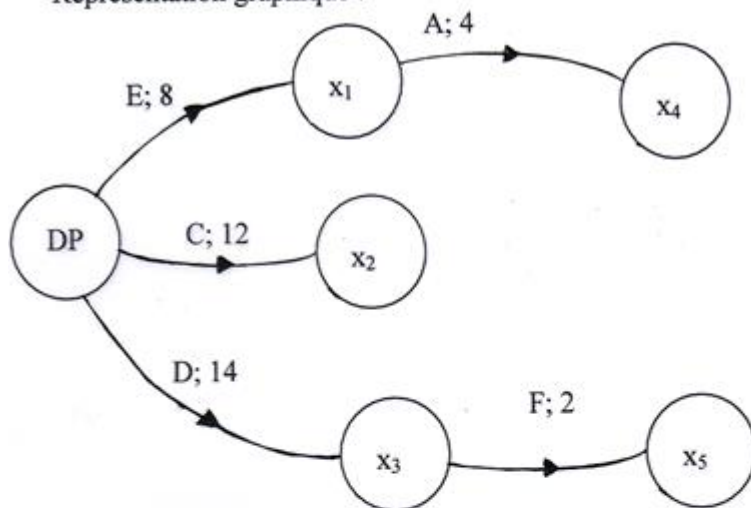


La tâche A nécessite E :

Représentation graphique :

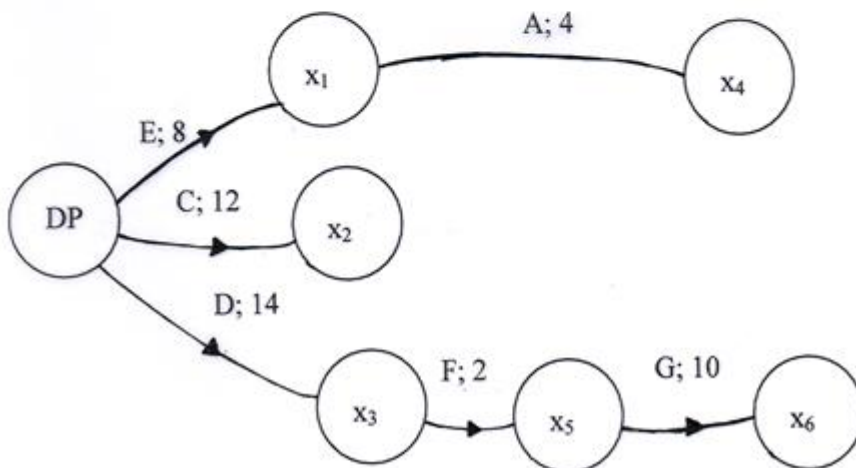
La tâche F nécessite D :

Représentation graphique :



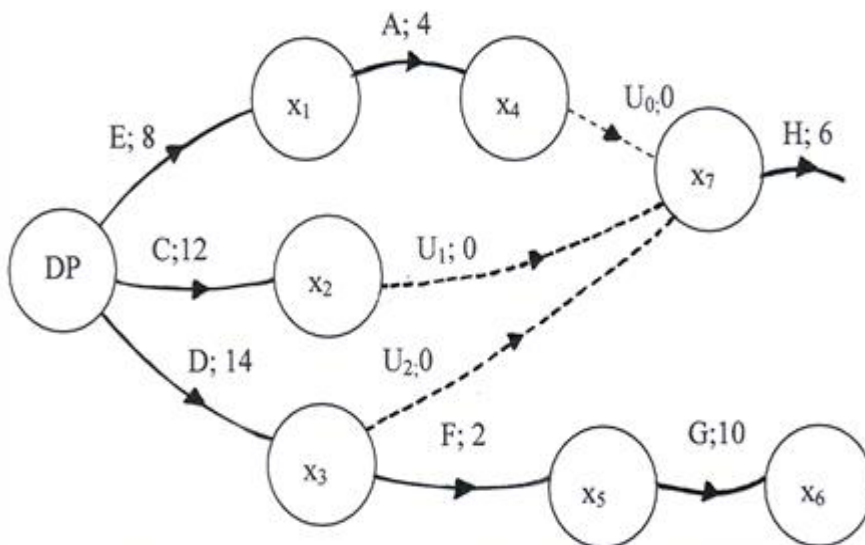
La tâche G nécessite F :

Représentation graphique :

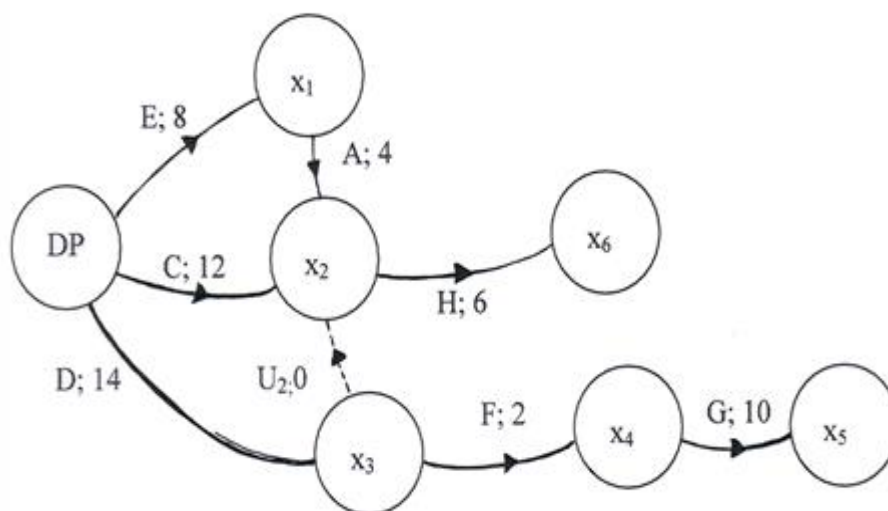


La tâche H nécessite A,C et D :

Représentation graphique :

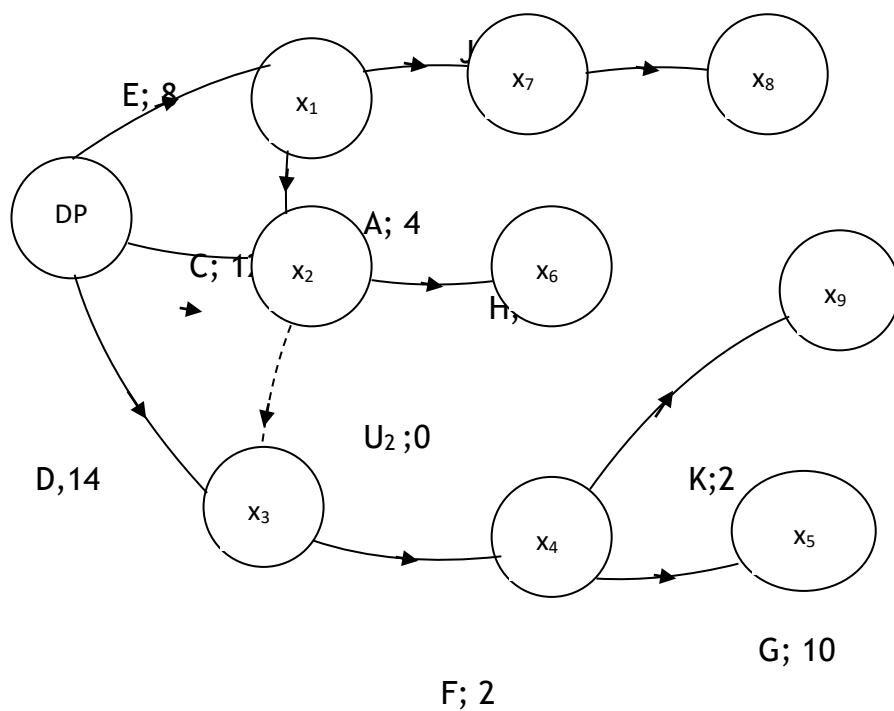


Les tâches U_0 , U_1 et U_2 sont des tâches fictives de durées nulles ; seules U_0 et U_1 peuvent être supprimées, ce qui permettra d'obtenir la représentation simplifiée suivante :



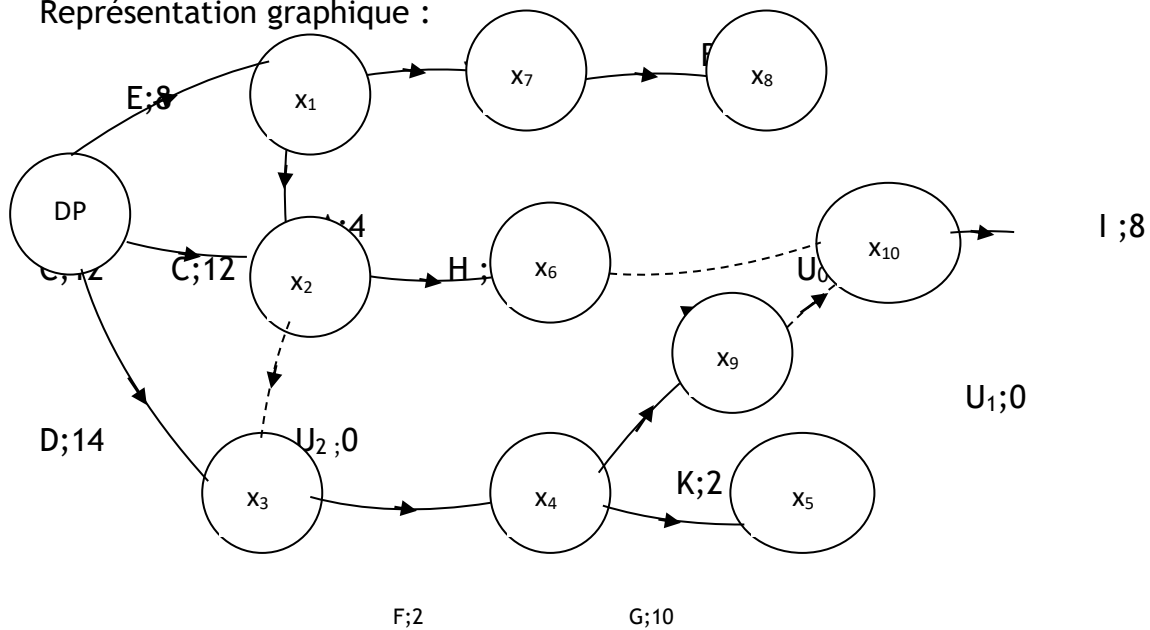
La tâche J nécessite E et la tâche K nécessite F et B nécessite J

Représentation graphique :

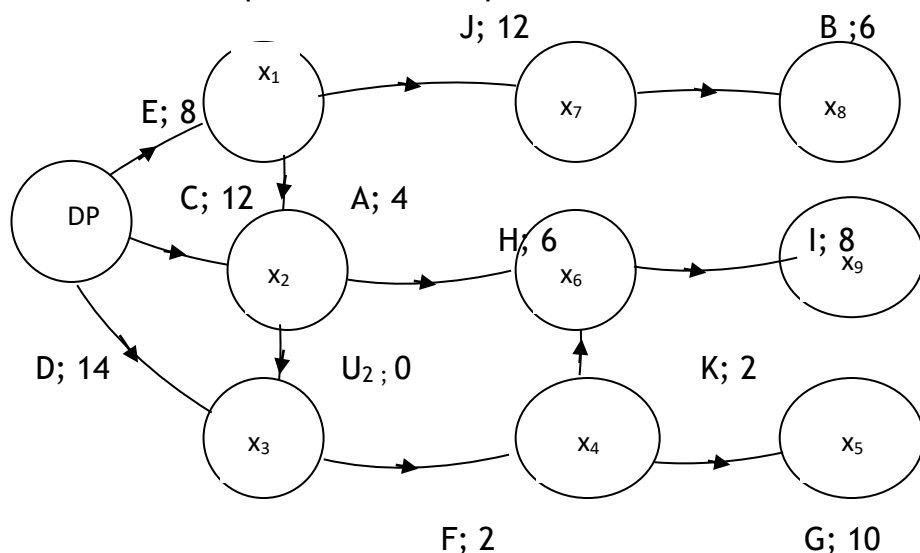


Enfin la tâche I nécessite H et K :

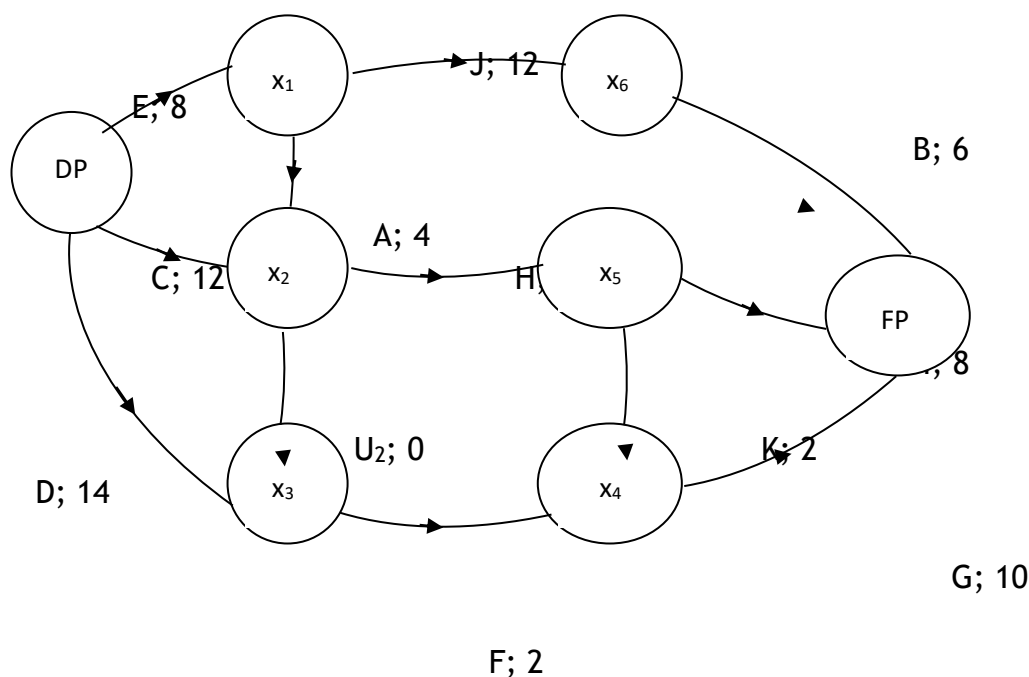
Représentation graphique :



Les tâches U_0 et U_1 sont des tâches fictives qui peuvent être supprimées, ce qui permet d'obtenir la représentation simplifiée suivante :



Les tâches B, G et I ne sont nécessaires à aucune autre tâche, elles doivent toutes les trois coïncider avec la fin du projet FP ; pour cela on doit renuméroter les sommets :



3 - Calcul des dates au plus tôt :

$t_{DP} = 0$ par définition

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(E) = 0 + 8 = 8$

L'étape x_2 : $tx_2 = t_{DP} + d(C) = 0 + 12 = 12$

L'étape x_3 : $tx_3 = t_{DP} + d(D) = 0 + 14 = 14$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_3 + d(F) = 14 + 2 = 16$

L'étape x_5 : $tx_5 = \text{Max} (tx_2 + d (H) \text{ } tx_4 + d (K))$
 $= \text{Max} (12 + 6, 16 + 2) = \text{Max} (18,18) = 18$

L'étape x_6 : $tx_6 = tx_1 + d (J) = 8 + 12 = 20$

L'étape FP : $t_{FP} = \text{Max} (tx_4 + d (G), tx_5 + d (I), tx_6 + d (B))$
 $= \text{Max} (16+10, 18+8, 20+6) = \text{Max} (26,26,26) = 26$

Calcul des dates au plus tard :

L'étape FP : $T_{FP} = T_{FP} = 26$

L'étape x_6 : $Tx_6 = T_{FP} - d (B) = 26 - 6 = 20$

L'étape x_5 : $Tx_5 = T_{FP} - d (I) = 26 - 8 = 18$

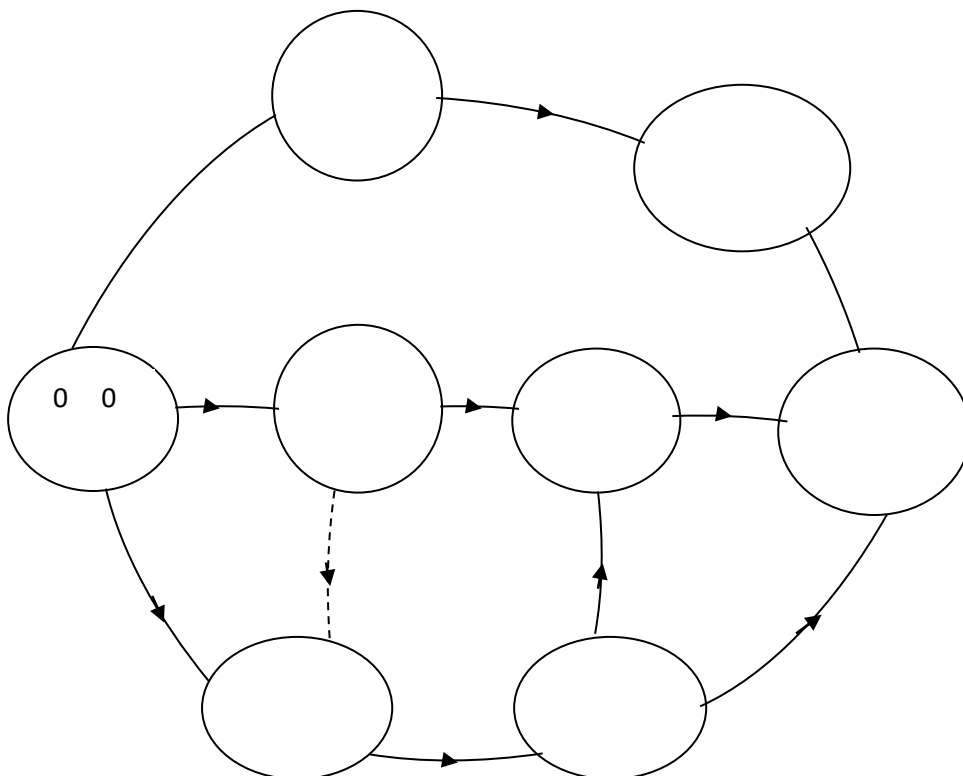
L'étape x_4 : $Tx_4 = T_{FP} - d (G) = 26 - 10 = 16$

L'étape x_3 : $Tx_3 = Tx_4 - d (F) = 16 - 2 = 14$

L'étape x_2 : $Tx_2 = \text{Min} Tx_5 - d (H) , Tx_3 - d (U_2))$
 $= \text{Min} (18 - 6 ; 14 - 0) = \text{Min} (12,14) = 12$

L'étape x_1 : $Tx_1 = \text{Min} (Tx_2 - d (A) , Tx_6 - d (J))$
 $= \text{Min} (12 - 4 , 20 - 12) = \text{Min} (8, 8) = 8$

L'étape DP : $T_{DP} = \text{Min} (Tx_1 - d (E), Tx_2 - d (C) , Tx_3 - d (D))$
 $= \text{Min} (8 - 8 , 12 - 12, 14 - 14) = 0$



On remarque que, pour chaque étape les dates au plus tôt et au plus tard sont égales, toutes les étapes sont critiques ; il existe plusieurs chemins critiques :

1. DP, E, J, B, FP
2. DP, C, H, I, FP
3. DP, D, F, G, FP
4. DP, E, A, H, I, FP
5. DP, D, F, K, I, FP

4- Le temps minimum nécessaire par le lancement est : 26 semaines

5- Calcul des marges totales :

Etape	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marges totales
DP	0	0	0
X ₁	8	8	0
X ₂	12	12	0
X ₃	14	14	0
X ₄	16	16	0
X ₅	18	18	0
X ₆	20	20	0
FP	26	26	0

LEÇON N° 06 :LE CHOIX D'INVESTISSEMENTS

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE : À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable d'établir et choisir le projet le plus bénéfique.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I- DEFINITION DE L'INVESTISSEMENT

II- LES DIFFERENTS TYPES DE CLASSIFICATION DE L'INVESTISSEMENT

- 1- Classification par nature
- 2- Classification selon la finalité
- 3- Classification selon l'objectif

III- LES ETAPES DU PROJET D'INVESTISSEMENT

- 1- L'Identification
- 2- La préparation
- 3- L'évaluation
- 4- La décision
- 5- L'exécution ou la réalisation
- 6- Le contrôle ou le suivi

IV-LES CRITERES DE RENTABILITE DE L'INVESTISSEMENT

- 1- Le délai de récupération
- 2- La méthode financière (RATIO)
- 3- La valeur actuelle nette (V.A.N)
- 4- Le taux de rentabilité interne (TRI)

EXERCICES CORRIGES

INTRODUCTION :

Pour réaliser ses objectifs, lesquels sont établis sur la base des objectifs de ventes ; l'entreprise doit disposer d'investissements suffisants l'acquisition et le renouvellement de ces mobilisations, ce qui entraîne des dépenses importantes et nécessite un financement.

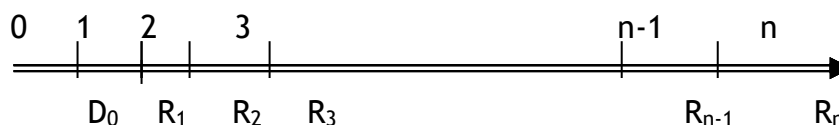
Investir est nécessairement faire un pas vers l'inconnu, c'est donc une démarche qui implique des risques. Alors toute initiative d'investissement mérite d'être au préalable étudiée dans ses moindres détails pour éviter les risques d'erreurs souvent très coûteux parce que souvent les investissements supposent des sommes importantes.

I- DEFINITION DE L'INVESTISSEMENT :

On peut définir l'investissement comme étant une dépense actuelle qui va engendrer des bénéfices futures. S'agissant de se projeter dans l'avenir, on substitue au terme investissement l'expression projet d'investissement. Pour l'entreprise, investir c'est consentir à décaisser aujourd'hui une certaine somme avec l'espoir d'encaisser ultérieurement sur plusieurs exercices des sommes plus importantes permettant d'augmenter ainsi la valeur de l'entreprise et par la suite le patrimoine des propriétaires. A partir de cette définition on peut déduire les trois caractéristiques de l'investissement.

- L'investissement est un décaissement actuel : toute activité de l'entreprise consiste à avancer des sommes d'argent en vue d'obtenir des revenus futurs. Le cycle d'investissement s'étale sur plusieurs années ; par exemple une machine ou un bâtiment vont être utilisés pendant plusieurs cycles de production et donc ils vont participer aux résultats de plusieurs exercices.

- Les encaissements doivent être supérieurs aux décaissements ; un investissement doit générer " réaliser" des encaissements supérieurs aux décaissements ce qui permet d'augmenter la valeur de l'entreprise, dans quel cas ; on dit qu'il est **rentable**. Le problème est de savoir comment évaluer les flux des liquidités liés à l'investissement afin de vérifier cette inégalité fondamentale entre les encaissements et le décaissement.



Si on désigne par :

D_0 : La dépense initiale faite à l'année 0

$R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ sont les rentrées d'argent dans la 1^{ère} année, 2^{ème} année, 3^{ème} année, ..., la n^{ième} année respectivement.

Les encaissements et décaissements se réalisent dans des points différents du temps.

- **L'incertitude** : avec l'espoir d'encaisser ultérieurement ; au moment de l'investissement le décideur ne peut que estimer ce que seront les encaissements à venir. Toute décision d'investissement comporte une évaluation du risque d'exploitation, le risque est plus

important quand le bien acheté est destiné à être utilisé longtemps et son prix d'achat est élevé. L'analyse financière d'un projet d'investissement vise à estimer sa rentabilité. Cette estimation passe nécessairement par une étude préalable des conditions techniques et une analyse commerciale qui cherche d'abord de la viabilité de l'investissement. C'est-à-dire la possibilité de son développement et de son aboutissement.

On peut donc définir l'investissement de plusieurs points de vue :

- **Du point de vue comptabilité** : c'est un capital constant productif ou non productif, à emploi durable.

- **Du point de vue économique** : l'investissement est important dans l'activité de production, il gère le progrès économique principal puisqu'il consiste en l'échange d'un capital actuel contre les revenus futurs d'un montant égal ou supérieur, le caractère de l'investissement est être productif.

- **Du point de vue financier** : l'investissement est une dépense actuelle qui produit des revenus sur une longue période, il doit être financé par des capitaux permanents. Le financier s'intéresse à l'équilibre dans le temps entre les ressources et les emplois.

II- LES DIFFERENTS TYPES DE CLASSIFICATION DE L'INVESTISSEMENT :

On classe généralement les investissements selon leur **Nature**, leur **finalité** et leur **objectif**.

1- Classification par nature :

On distingue l'investissement corporel et l'investissement incorporel :

a- L'investissement corporel : Il s'agit des biens physiques ou d'objets matériels tels que les terrains, les bâtiments, les machines, les véhicules, le mobilier, etc....

b- L'investissement incorporel : Il s'agit des investissements abstraits tels que le fond de commerce, la licence de fabrication, les dépenses pour la formation du personnel, pour la publicité ou pour des études de recherche etc....

2- Classification selon la finalité :

On distingue l'investissement directement productif et l'investissement non directement productif.

a- L'investissement directement productif : C'est un investissement dont la production est destinée à être commercialisée sur le projet.

b- L'investissement non directement productif : Les investissements non directement productifs sont des projets tels que :

- Les projets sociaux : enseignement, santé, éducation ;
- Les infrastructures : les routes, les ponts, les barrages ;

- L'appui à la production : formation, assistance ; encadrement technique.

3- Classification selon l'objectif :

On distingue l'investissement de remplacement et l'investissement d'expansion ou de croissance :

a- L'investissement de remplacement : Appelé aussi de renouvellement ou investissement forcé, il s'agit d'investissement nécessaire pour continuer les activités de l'entreprise. Il permet de garder intact le potentiel de production, si ce type d'investissement n'est pas réalisé, l'entreprise risque de disparaître à court terme.

b- L'investissement d'expansion ou de croissance : Contrairement à l'investissement de remplacement qui est une obligation à court terme. L'investissement de croissance est un choix pour le long terme. Il est destiné à faire face à la croissance de la demande, soit par le développement de la production de produit qu'elle fabrique déjà, soit par le développement de la production de produits nouveaux.

III- LES ETAPES DU PROJET D'INVESTISSEMENT :

Appelées aussi cycle de projet d'un courant dont le processus va du lancement de l'idée de projet, à sa préparation, son évaluation, la prise de décision, puis son exécution ; ces étapes sont au nombre de six :

- 1- L'identification ;
- 2- La préparation ;
- 3- L'évaluation ;
- 4- La décision ;
- 5- L'exécution ;
- 6- Le contrôle.

On appelle cela un cycle parce qu'une phase conduit naturellement à une phase suivante et qu'il est souvent nécessaire de revenir à une phase précédente au cours du déroulement des opérations dans le temps.

1- L'identification :

La première phase consiste en la recherche des projets qui contribuent au développement du pays, et qui dégagent en même temps une rentabilité assez suffisante pour justifier leur financement c'est-à-dire qu'ils dégagent des excédents suffisants pour rémunérer la contribution de ceux qui ont ramené des fonds. Parmi les objectifs de l'identification, on cite :

- Voir si l'idée du projet est techniquement, financièrement et économiquement viable.
- S'assurer qu'on peut continuer à consacrer d'autres ressources.

2- La préparation :

Dans cette phase on procède à la collecte des données de base qui serviront à l'étude et à l'examen du projet et si celui-ci est estimé réalisable du point de vue commercial, technique et financier. Son évaluation devient alors envisageable voire même possible.

3- L'évaluation :

Durant cette phase on regroupe les données obtenues dans la phase précédente en vue de procéder à une série d'études et d'évaluation qui concerne :

- L'évaluation financière ;
- L'évaluation technique ;
- L'évaluation commerciale ;
- L'analyse de la sensibilité.

a- L'évaluation financière : Son but est de déterminer si le projet est capable de générer des excédents financiers susceptibles de couvrir le revenu des facteurs de production engagé dans le projet. A partir de cette analyse, il sera possible de porter un jugement sur le plan financement initial.

b- L'évaluation technique : Elle consiste à présenter le procédé de fabrication, la durée des travaux et les besoins en matières premières.

c- L'évaluation commerciale : C'est l'étude du marché, le niveau de la demande, celui de l'offre, le niveau général des prix et la concurrence.

d- L'analyse de la sensibilité : L'analyse de la sensibilité est la détermination des différents coûts et avantages relatifs au projet. Ces derniers ne sont en fait que des estimations qui engagent de se rapprocher le plus de la réalité et qui restent exposées à l'erreur.

Les analyses de la sensibilité permettent de ramener des estimations à des valeurs plus proches de la réalité. Sur la base des analyses de la sensibilité ; de nouvelles rentabilités financières sont calculées et c'est selon ces dernières que la décision de financement est prise ou non.

4- La décision :

Les responsables pourront alors prendre en pleine connaissance de cause une décision motivée, trois décisions sont possibles :

- 1- Le refus du projet, pour cause de rentabilité insuffisante ou qu'il est jugé prématuré ;
- 2- La décision de poursuivre les études, soit pour obtenir des informations plus précises, soit pour établir des variantes de possibilités nouvelles ;
- 3- L'acceptation pure et simple du projet.

5- L'exécution ou la réalisation :

Après la prise de la décision d'entreprendre le projet identifié et évalué, on passe à la construction d'ouvrages, l'acquisition des équipements et la mise à la disposition des fonds nécessaires à la concrétisation du projet.

6- Le contrôle ou le suivi :

Durant la phase de suivi, il sera procédé à différents contrôles qui porteront sur les points suivants :

- Contrôle du bon déroulement de réalisation du projet.
- Contrôle du fonctionnement de l'entreprise sur le plan budgétaire, de la gestion de stocks et de la production.
- Contrôle périodique des documents comptables qui permet d'apprécier la situation financière de l'entreprise et plus exactement : sa capacité de remboursement des emprunts contractés, sa situation de trésorerie et sa capacité d'autofinancement.
- Le suivi des risques auxquels est exposé un projet et qui sont :
 - Le risque de non opportunité : c'est-à-dire le produit dont est l'origine, le projet ne correspond pas au besoin des utilisateurs ;
 - Le risque de non - conformité : le produit du projet n'est plus conforme à sa définition initiale ;
 - Le risque de mauvaise réalisation ; c'est-à-dire, il dure plus longtemps ou il coûte plus cher que ce qui était prévu au départ.

IV- LES CRITERES DE RENTABILITE DE L'INVESTISSEMENT :

Comment peut-on choisir entre plusieurs projets d'investissements ? Pour pouvoir répondre à cette question ; tout projet d'investissement doit être évalué et chiffré : recettes et dépenses.

Chaque investissement est connu par :

- **La dépense initiale** : C'est le prix d'acquisition, elle est suivie de dépenses futures secondaires telles que l'entretien ou la réparation.
- **La durée de vie** : la rentabilité d'un investissement doit être évaluée sur toute sa durée de vie.
- **Cash-flow** : C'est le surplus financier ; le bénéfice net non distribué et les dotations aux amortissements.
- **La valeur résiduelle** : À la fin de l'exploitation de l'entreprise, certains de ses actifs présentera une valeur résiduelle.

On distingue cinq méthodes pour choisir entre les différents projets d'investissement qui sont :

1. Le délai de récupération ;
2. La méthode financière (radio) ;
3. La valeur actuelle nette (V.A.N) ;
4. L'indice de profitabilité ;
5. Le taux de rentabilité interne.

1- Le délai de récupération :

Pour chaque investissement, il est possible de calculer en combien d'années l'investisseur pourra récupérer sa dépense initiale. Alors il choisit l'investissement dont le délai de récupération est le plus court.

On peut définir le délai de récupération comme la durée au bout de laquelle la valeur des flux des recettes nettes procurés par un investissement devient égale à la dépense initialement engagée. Il s'agit donc de la durée pour que l'accumulation des recettes dues à l'investissement compense au moins la somme investie.

Exemple N°01 :

Soient les deux projets A et B réalisés dans les conditions suivantes :

Périodes	Projet A		Projet B	
	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes
0	600.000 DA		700.000 DA	
1		200.000 DA		300.000 DA
2		180.000 DA		200.000 DA
3		120.000 DA		200.000 DA
4		100.000 DA		100.000 DA
5		80.000 DA		50 000 DA
6		80.000 DA		50 000 DA
Total		760.000 DA		900 000 DA

On remarque que le capital investi dont le projet A est récupéré au bout de quatre ans ;

$200000 + 180000 + 120000 + 100000 = 600000$ DA.

Par contre le capital investi dans le projet B est récupéré au bout de trois ans ;

$300000 + 200000 + 200000 = 700000$ DA. Selon cette méthode, on choisit ou on retient le projet B parce qu'il a le délai de récupération le plus court.

Exemple N°02 : Soient les deux investissements suivants :

Périodes	Projet A		Projet B	
	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes
0	200.000 DA		200.000 DA	
1		50.000 DA		20.000 DA
2		40.000 DA		30.000 DA
3		60.000 DA		30.000 DA
4		50.000 DA		30.000 DA
5		10.000 DA		90 000 DA
6		12.000 DA		80 000 DA
Total		222.000 DA		280 000 DA

Quel est le projet le plus rentable selon la méthode du délai de récupération ?

Pour le projet A ; on remarque que le capital investi est récupéré au bout de quatre ans ;

$50000 + 40000 + 60000 + 50000 = 200000$ DA.

Pour le projet B ; on remarque que le capital investi est récupéré au bout de cinq ans ;

$20000 + 30000 + 30.000 + 30000 + 90000 = 200000$ DA.

Selon cette méthode ont choisi le projet A parce qu'il a le délai de récupération le moins court.

Exemple N°3 :

Soient les deux projets A et B réalisés dans les conditions suivantes :

Périodes	Projet A		Projet B	
	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes	Le coût de l'investissement	Les flux des recettes
0	200.000 DA		200.000 DA	
1		40.000 DA		20.000 DA
2		40.000 DA		30.000 DA
3		40.000 DA		50.000 DA
4		40.000 DA		40.000 DA
5		40.000 DA		90 000 DA
6		40.000 DA		90 000 DA
Total		240.000 DA		320 000 DA

Pour le projet A ; on remarque que le capital investi est récupéré au bout de cinq ans :

$$40000 + 40000 + 40000 + 40000 + 40000 = 200000 \text{ DA.}$$

Pour le projet B ; on remarque que le capital investi est récupéré au bout de quatre ans et quelques mois ; alors le projet le plus rentable est le projet B.

a- Les inconvénients de cette méthode :

- Elle ne prend pas le facteur temps dans l'analyse parce que les flux ne sont pas actualisés ;
- Elle ignore les flux qui interviennent après la récupération du capital investi ; c'est -à- dire le total général des flux ;
- Il est très important de signaler que la méthode de délai de récupération ne peut être appliquée que si les projets à comparer ont des durées de vie égales.

b- Les avantages de cette méthode :

- La rapidité est le meilleur avantage que présente les critères (le procédé ou la méthode) du délai de récupération ;
- S'agissant d'un instrument qui détermine la rapidité de récupération du capital investi ; c'est donc un critère qui permet d'apprécier la liquidité que peut produire le projet.

Remarque : Ce critère est généralement utilisé quand :

- L'entreprise manque de liquidité ;
- Les actionnaires souhaitent récupérer rapidement leurs fonds ;
- L'avenir présente des risques ; il serait alors prudent de récupérer le plus vite le capital investi.

2- La méthode financière (Radio) :

Cette méthode consiste à exprimer en pourcentage le bénéfice obtenu par rapport au capital investi, il s'agit du taux de rentabilité de l'investissement.

$$\text{Taux de rentabilité} = \frac{\text{Bénéfice annuel}}{\text{Capital investi}} \times 100$$

Le bénéfice annuel peut être variable pendant la durée d'utilisation de l'investissement, alors on met au numérateur le bénéfice moyen annuel, et au dénominateur on met le capital moyen investi ; on notera ce dernier **CMI**.

$$\text{CMI} = \frac{\text{Capital investi} - \text{La valeur résiduelle}}{2}$$

$$\text{Taux de rentabilité} = \frac{\text{Bénéfice moyen annuel}}{\text{Capital moyen investi}}$$

Selon cette méthode, il faut prévoir le cash flow.

Exemple N° 4 : Soit à étudier le projet d'investissement dont l'exploitation doit durer 5 ans dans une société soumise à l'IBS au taux de 30% ; il est prévu un investissement initial de 200.000 DA et une valeur résiduelle nulle en fin d'exploitation.

Années	Produits	Charges
1	170.000 DA	120.000 DA
2	194.000 DA	130.000 DA
3	228.000 DA	150.000 DA
4	267.000 DA	175.000 DA
5	316.000 DA	210.000 DA

Calculer les cash-flows réalisés annuellement ainsi que le taux de rentabilité.

Calcul de l'amortissement (noté Amort) :

$$\text{L'amortissement} = \frac{\text{investissement initial}}{\text{durée de vie du projet}}$$

Dans notre exemple : amort = 200.000/5 = 40.000

Calcul du bénéfice brut :

Pour chaque année ; le bénéfice brut est calculé par la formule suivante :

Le bénéfice brut = produit - (charge décaissée + l'amortissement).

Par exemple pour l'année 1 :

$$\begin{aligned} \text{Le bénéfice brut} &= \text{produit} - (\text{charge décaissée} + \text{l'amortissement}). \\ &= 170.000 - (120.000 + 40.000) = 170.000 - 160.000 \\ &= 10.000 \text{ DA.} \end{aligned}$$

Calcul de l'IBS :

$$\text{IBS} = \text{Le bénéfice brut} \times 30\%$$

Par exemple pour l'année 1 :

$$\text{IBS} = \text{le bénéfice brut} \times 30\% = 10.000 \times 30\% = 10.000 \times 3/100 = 3.000$$

Calcul du bénéfice net d'impôt :

Le bénéfice net d'impôt = le bénéfice net - l'IBS.

Par exemple pour l'année 1 :

$$\text{Le bénéfice net d'impôt} = \text{le bénéfice net} - \text{l'IBS} = 10.000 - 3.000 = 7.000 \text{ DA.}$$

Calcul du cash flow :

Annuellement, le cash flow est calculé par la formule suivante :

Le cash flow = l'amortissement + bénéfice net d'impôt.

Par exemple pour l'année 1 :

Le cash flow = l'amortissement + bénéfice net d'impôt

$$= 40.000 + 7.000 = 47.000\text{DA}$$

Le tableau suivant résume le calcul du cash-flow :

Années	Produits	Charges			Résultat brut	IBS 30%	Résultat net d'impôt	Cash-flow
		Ch. décaissées	Amort	Total				
1	170.000	120.000	40.000	160.000	10.000	3.000	7.000	47.000
2	194.000	130.000	40.000	170.000	24.000	7.200	16.800	56.800
3	228.000	150.000	40.000	190.000	38.000	11.400	26.600	66.600
4	267.000	175.000	40.000	215.000	52.000	15.600	36.400	76.400
5	316.000	210.000	40.000	250.000	66.000	19.800	46.200	86.200

Le calcul du taux de rentabilité, nécessite le calcul du bénéfice moyen annuel (BMA) et du capital moyen investi (CMI).

Le bénéfice moyen annuel (BMA) est la somme des cash flow divisée par le nombre d'années ;

$$\text{BMA} = (47.000 + 56.800 + 66.600 + 76.400 + 86.200) / 5 = 333.000 / 5 = 66.600\text{DA}.$$

Le capital moyen investi (CMI) est calculé par la formule :

$$\text{CMI} = \frac{\text{Le capital investis} - \text{La valeur résiduelle}}{2}$$

$$\text{CMI} = (200.000 - 0) / 2 = 100.000 \text{ DA}$$

$$\text{Alors le taux de rentabilité est : } 66.600 / 100.000 = 0,666 = 66,6 \%$$

Le taux de rentabilité est 66,6%

a- Les avantages de cette méthode :

- Elle prend en considération tous les flux ;
- Elle est simple.

b- Les inconvénients de cette méthode :

- Elle ne prend pas le facteur temps en considération.

3- La valeur actuelle nette (V.A.N) :

Tout investissement est un échange entre des dépenses présentes et des recettes futures ; l'actualisation est devenue nécessaire parce qu'il n'est pas possible de comparer entre des dépenses d'investissement enregistrées dans le présent et des recettes d'exploitation générées par ce projet.

L'actualisation est un instrument de comparaison entre le présent et l'avenir et permet à ce titre d'orienter le choix d'investissement.

Avant d'étudier l'actualisation ou de monter l'impact de l'actualisation ; on étudie d'abord la notion de capitalisation avec l'intérêt composé.

a- La capitalisation : Supposons une somme de 1000 DA placée à intérêts composés pendant trois ans, au taux annuel de 10% sa valeur acquise sera :

A la fin de la 1^{ère} année = $1000 + 1000 \times 10\% = 1000 + 100 = 1100$ DA

A la fin de la 2^{ème} année = $1100 + 1100 \times 10\% = 1100 + 110 = 1210$ DA

A la fin de la 3^{ème} année = $1210 + 1210 \times 10\% = 1210 + 121 = 1331$ DA.

Les tables financières d'intérêts composés donnent directement le montant global qui sera encaissé à la fin de la période n pour un taux donné, pour l'exemple précédent, la table financière donne pour un taux d'intérêt de 10% et une durée de 3 ans, un coefficient de 1,331; en appliquant ce coefficient à la somme investie, on trouve le montant: $1000 \text{ DA} \times 1,331 = 1331$ DA.

Exemple N°05 :

Calculer C_5 la valeur acquise de la somme $C_0 = 120.000$ DA placée à intérêts composés au taux de 16% après 5 ans.

$$C_5 = C_0 (1 + 0,16)^5 = 252.041 \text{ DA}$$

Exemple N°06 :

Calculer C_4 , C_8 , C_{10} les valeurs acquises de la somme d'argent $C_0 = 45.000$ DA placée à intérêts composés au taux de 5,5% respectivement après la 4^{ème}, la 8^{ème} et la 10^{ème} année.

$$C_4 = C_0 (1 + 0,055)^4 = 55.747,10 \text{ DA}$$

$$C_8 = C_0 (1 + 0,055)^8 = 69.060,89 \text{ DA}$$

$$C_{10} = C_0 (1 + 0,055)^{10} = 76.866,50 \text{ DA}$$

b- L'actualisation : C'est le phénomène inverse de la capitalisation si on reçoit 1 DA aujourd'hui vaut $(1 + i)^{-1}$ DA. Pendant un an on peut comprendre que 1 DA disponible dans un an vaut aujourd'hui $1/(1+i)^1$.

De façon plus générale si 1 DA vaut $(1 + i)^{-n}$ DA après n années, il est normal que 1 DA paru dans n années vaut en réalité aujourd'hui $1/(1 + i)^n$.

En résumé :

- Notion de capitalisation : 1 DA aujourd'hui vaudra $(1 + i)^n$ dans n années ;
- Notion d'actualisation : $1/(1 + i)^n$ DA aujourd'hui valait 1 DA il y a n années.

On peut généraliser par les notations suivantes :

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

Exemple N° 07 :

Quelle est la valeur actuelle d'une somme de 500.000 DA qui sera obtenue dans 5 ans sachant que le taux d'actualisation est de 4%.

$$C_0 = 500.000 (1+0,04)^{-5} = 410.963,55 \text{ DA}$$

Exemple N° 08 :

Quelle est la valeur actuelle des sommes suivantes qui seront perçues dans le futur à une année donnée ?

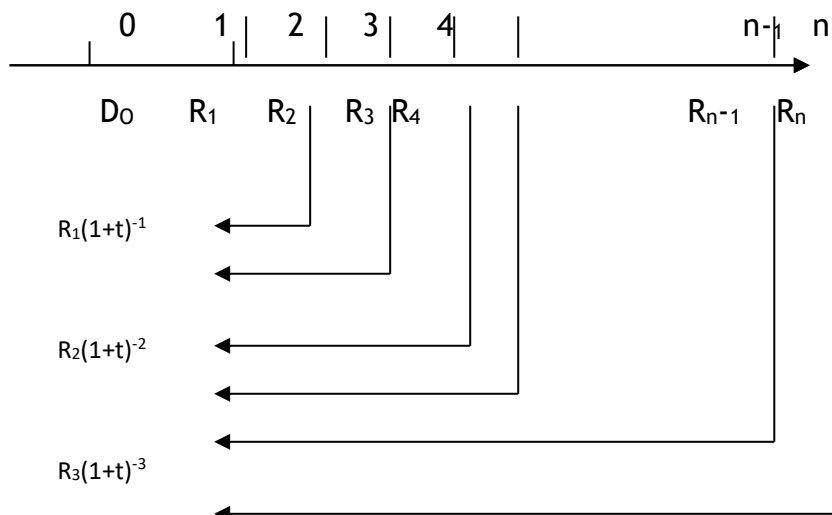
Somme à percevoir	Nombre d'années	Taux d'actualisation en %	Valeur actuelle
744 DA	8	4	$C_0 = 744 (1+0,04)^{-8} = 543,63 \text{ DA}$
2.543 DA	4	8	$C_0 = 2.543(1+0,08)^{-4} = 1.311,65 \text{ DA}$
1.213 DA	20	7	$C_0 = 1.213 (1+0,07)^{-20} = 313,46 \text{ DA}$
22 DA	12	14	$C_0 = 22(1+0,14)^{-12} = 4,56 \text{ DA}$
343 DA	8	12	$C_0 = 343 (1+0,12)^{-8} = 138,53 \text{ DA}$

La méthode VAN consiste à calculer le revenu global actualisé par différence entre le cash-flow, la capacité d'autofinancement actualisés et les dépenses d'investissement à une date initiale située un an avant que n'apparaisse le premier résultat. Si on désigne par n la durée de vie d'un projet d'investissement.

D_0 : la dépense d'investissement initiale

$R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n$: les cash-flow

t : le taux d'actualisation.



Le revenu global actualisé = la somme des cash flow actualisés - la dépense initiale d'investissement.

On exprime le revenu global actualisé par : la valeur actuelle nette (VAN) et le bénéfice actuel net (BAN).

Il faudra que la différence entre les recettes actualisées et la dépense initiale soit positive.

Cette différence va permettre de :

- Récupérer la dépense initialement investie ;
- Payer les intérêts des emprunts qui ont financé le projet d'investissement ;
- S'enrichir !

Remarques :

- 1- Selon cette méthode tout projet qui présente une VAN négative est rejeté ;
- 2- Entre deux projets, on choisit celui qui présente la VAN la plus élevée.

Exemple N°09 : Soit le projet suivant dont les cash flow sont les suivants :

Années	Cash-flow
0	1650 DA
1	1000 DA
2	900 DA
3	800 DA
4	700 DA

Calculer la VAN de ce projet sachant que le taux d'actualisation est de 12%.

Solution : Calculons d'abord les cash flow actualisés sur le tableau ci-dessus :

Années	Cash-flow	Cash flow actualisé
0	1.650 DA	
1	1.000 DA	$1.000(1,12)^{-1} = 892,85$ DA
2	900 DA	$900(1,12)^{-2} = 717,47$ DA
3	800 DA	$800(1,12)^{-3} = 569,42$ DA
4	700 DA	$700(1,12)^{-4} = 444,86$ DA

$VAN = \text{somme des cash flow actualisés} - \text{la dépense initiale}$
 $= (892,85 + 717,47 + 569,42 + 444,86) - 1.650 = 2.624,6 - 1.650$
 $= 974,6 \text{ DA.}$

Exemple N° 10 : Soit le projet d'investissement dont la dépense initiale est de 80.000 DA, les flux futurs sont les suivants :

Années	Flux
1	8.000 DA
2	12.000 DA
3	18.000 DA
4	30.000 DA
5	30.000 DA
6	30.000 DA
7	30.000 DA
8	30.000 DA

Calculer la VAN au taux d'actualisation de 9,5%.

Solution : Comme pour l'exemple précédent ; on calcule d'abord les flux actualisés :

Années	flux	flux actualisé
1	8.000 DA	$8.000 (1,095)^{-1} = 7.309,93 \text{ DA}$
2	12.000 DA	$12.000 (1,095)^{-2} = 10.008,13 \text{ DA}$
3	18.000 DA	$18.000 (1,095)^{-3} = 13.709,76 \text{ DA}$
4	30.000 DA	$30.000 (1,095)^{-4} = 20.867,22 \text{ DA}$
5	30.000 DA	$30.000 (1,095)^{-5} = 19.056,82 \text{ DA}$
6	30.000 DA	$30.000 (1,095)^{-6} = 17.403,49 \text{ DA}$
7	30.000 DA	$30.000 (1,095)^{-7} = 15.893,60 \text{ DA}$
8	30.000 DA	$30.000 (1,095)^{-8} = 14.514,70 \text{ DA}$

VAN = somme des cash flow actualisés - la dépense initiale

$$= (7.309,93 + 10.008,13 + 13.709,76 + 20.867,22 + 19.056,82 + 17.403,49 + 15.893,60 + 14.514,70) - 80.000 = 31.759,65 \text{ DA}$$

La VAN est : 31.759,65 DA

Exemple N° 11 : Soit les deux projets suivants :

Années	Projet A			Projet B		
	D ₀	Flux	Les flux des recettes	D ₀	Flux	Flux actualisés au taux de 10%
0	1.000 DA			1.000 DA		
1		100 DA	90,90 DA		250 DA	227,27 DA
2		300 DA	247,93 DA		350 DA	289,25 DA
3		500 DA	375,65 DA		450 DA	338,09 DA

4		700 DA	478,10 DA		550DA	375,65 DA
Total			1.192,58 DA			1.230,26 DA

Dites quel est le projet le plus rentable selon la VAN et selon le délai de récupération.

Réponse :

La VAN du projet A est : $1.192,58 - 1.000 = 192,58$ DA

La VAN du projet B est : $1.230,26 - 1.000 = 230,26$ DA

Selon la méthode VAN ; le projet B est plus rentable car il présente la plus grande VAN.

Selon le délai de récupération ; le projet B est le plus rentable car la dépense est récupérée au bout de la 3^{ème} année ; alors que celle de A n'est récupérée qu'au bout de la 4^{ème}.

c- Les avantages de la méthode VAN :

- C'est le critère de choix d'investissement le plus complet dans la mesure où on raisonne à partir des flux actualisés ;
- Tous les flux sont pris en compte sur la durée totale du projet d'investissement.

d- Les inconvénients de la méthode VAN :

- Impossibilité de comparer des VAN des projets dont la durée de vie est différente ;
- L'importance des flux générés est différente selon la durée de vie et des projets dont les dépenses sont différentes, d'où le problème de choix du taux d'actualisation.

4- Le taux de rentabilité interne (TRI) :

Définition : le taux de rentabilité est un taux d'actualisation qui donne une VAN nulle (=0).

Exemple N° 12 : Soit le projet d'investissement avec les conditions suivantes :

Années	Flux nets
0	-10.000 DA
1	2.000 DA
2	5.000 DA
3	6.000 DA

Note : la valeur -10.000 indique que la dépense est 10.000DA.

Calculer la VAN aux taux suivants : 8%, 10%, 12%, 13%.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{VAN1} &= \left[2.000(1,08)^{-1} + 5.000(1,08)^{-2} + 6.000(1,08)^{-3} \right] - 10.000 \\ &= [1.851,85 + 4.286,69 + 4.762,99] - 10.000 = 10.901,53 - 10.000 \\ &= 901,53\text{DA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAN2} &= \left[2.000(1,1)^{-1} + 5.000(1,1)^{-2} + 6.000(1,1)^{-3} \right] - 10.000 \\ &= [1.818,18 + 4.132,23 + 4.507,88] - 10.000 = 10.458,29 - 10.000 \\ &= 458,29\text{DA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAN3} &= \left[2.000(1,12)^{-1} + 5.000(1,12)^{-2} + 6.000(1,12)^{-3} \right] - 10.000 \\ &= 10.042,35 - 10.000 = 42,35\text{DA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAN4} &= \left[2.000(1,13)^{-1} + 5.000(1,13)^{-2} + 6.000(1,13)^{-3} \right] - 10.000 \\ &= 9.843,94 - 10.000 = 156,06\text{DA} \end{aligned}$$

À partir du taux de 8% ; la VAN diminue au fur et à mesure que le taux d'actualisation augmente arrivant au point où cette VAN s'annule, ce point est justement le niveau du taux de rentabilité interne.

La VAN s'annule quand la somme des flux actualisés est égale à la dépense initiale ; autrement dit le taux de rentabilité interne détermine le coût maximum des capitaux que pourrait supporter le projet.

On peut déterminer le taux de rentabilité interne par la méthode d'interpolation linéaire qui consiste à :

$$12\% \rightarrow \text{VAN} = 42,35 \text{ DA}$$

$$X \rightarrow \text{VAN} = 0$$

$$13\% \rightarrow \text{VAN} = 156,06$$

$$\begin{aligned} X &= 0,12 + (0,13 - 0,12) (42,35 / (42,35 + 156,06)) \\ &= 0,12 + 0,01 (42,35 / 198,41) = 0,1221 \end{aligned}$$

D'où TRI = 12,21%.

EXERCICES CORRIGES :

EXERCICE N° 01 :

Soient les deux projets d'investissement A et B suivants :

Années	Projet A			Projet B		
	Produits	Charges	Amortissement	Produits	Charges	Amortissement
0	-	30.000	-	-	45.000	-
1	100.000	75.000	6.000	100.000	60.000	9.000
2	120.000	90.000	6.000	120.000	72.000	9.000
3	140.000	105.000	6.000	140.000	84.000	9.000
4	160.000	120.000	6.000	160.000	96.000	9.000
5	180.000	135.000	6.000	180.000	108.000	9.000

Travail demandé :

1- Présenter un tableau qui montre le calcul des cash-flows réalisés annuellement sachant que le taux d'IBS est de 30%.

2- Dire quel est le projet le plus rentable selon :

- La méthode VAN ;
- Le délai de récupération.

Note : Le taux d'actualisation est de 10%.

Exercice N° 02 :

Soient les deux projets d'investissement A et B suivants :

Années	Projet A		Projet B	
	Produits	Charges décaissées	Produits	Charges décaissées
0	-400.000	-	- 350.000	-
1	250.000	100.000	245.000	98.000
2	350.000	200.000	195.000	100.000
3	270.000	90.000	200.000	110.000
4	400.000	30.000	250.000	130.000
5	200.000	50.000	390.000	210.000
Valeur résiduelle	9.000	-	-	-

Travail demandé :

1- Calculer l'amortissement annuel de chaque projet.

2- Calculer la capacité d'autofinancement pour chaque projet.

3- Quel est le projet le plus rentable selon la VAN ?

Note : le taux d'actualisation est 10%.

Exercice N° 3 :

Une entreprise envisage de changer ses procédés de fabrication. Pour cela, elle doit acquérir un ensemble de matériels pour une somme globale de 200.000 DA, le financement se fera de la façon suivante :

- 100.000 DA à l'aide de fonds propres à l'entreprise ;
- Le reste soit 100.000 DA à l'aide d'un emprunt.

La durée de vie probable de ce projet d'investissement est de 5 ans, l'emprunt est remboursable sur 5 ans ; l'annuité de la somme remboursable est de 35.000 DA.

Les prévisions des produits et des charges décaissées à l'exclusion des annuités sont données dans le tableau suivant :

Années	Produits	Charges
1	170.000	120.000
2	194.000	130.000
3	228.000	150.000
4	267.000	175.000
5	316.000	210.000

Travail à faire :

Calculer la capacité d'autofinancement.

Exercice N° 4 :

Une entreprise souhaite acquérir un certain matériel industriel en vue de l'ouverture prochaine d'une nouvelle branche d'activité, elle a le choix entre trois types de matériel dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

	Matériel A	Matériel B	Matériel C
Prix d'acquisition	250.000	200.000	230.000
Cap-fin année (1)	70.000	30.000	38.000
Cap-fin année (2)	72.000	40.000	42.000
Cap-fin année (3)	76.000	70.000	81.000
Cap-fin année (4)	71.000	90.000	84.000
Cap-fin année (5)	68.000	80.000	69.000
Valeur résiduelle	5000	0	0

Remarque : Cap-fin est la capacité d'autofinancement.

Travail à faire :

Parmi ces trois projets d'investissement ; dire lequel est le plus rentable ; sachant que le taux d'actualisation est 10%.

CORRECTION DES EXERCICES :

Exercice N° 1 :

Pour le projet A :

Pour l'année 1 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 75.000 + 6.000 = 81.000 \text{ DA}$

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 100.000 - 81.000 = 19.000 \text{ DA}$

L'IBS = le résultat brut $\times$ 30%
 $= 19.000 \times 30\% = 5.700 \text{ DA}$

Le résultat net d'impôt = résultat brut - l'IBS
 $= 19.000 - 5.700 = 13.300 \text{ DA}$

Le cash flow = résultat net d'impôt + l'amortissement
 $= 13.300 + 6.000 = 19.300 \text{ DA.}$

Pour l'année 2 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 90.000 + 6.000 = 96.000 \text{ DA}$

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 120.000 - 96.000 = 24.000 \text{ DA}$

L'IBS = le résultat brut $\times$ 30%
 $= 24.000 \times 30\% = 7.200 \text{ DA}$

Le résultat net d'impôt = résultat brut - l'IBS
 $= 24.000 - 7200 = 16.800 \text{ DA}$

Le cash flow = résultat net d'impôt + l'amortissement
 $= 16.800 + 6.000 = 22.800 \text{ DA}$

Pour l'année 3 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 105.000 + 6.000 = 111.000 \text{ DA}$

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 140.000 - 111.000 = 29.000 \text{ DA}$

L'IBS = le résultat brut $\times$ 30%
 $= 29.000 \times 30\% = 8.700 \text{ DA}$

Le résultat net d'impôt = résultat brut - l'IBS
 $= 29.000 - 8.700 = 20.300 \text{ DA}$

Le cash flow = résultat net d'impôt + l'amortissement
 $= 20.300 + 6.000 = 26.300 \text{ DA}$

De même pour les années 4 et 5 ; ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

Années	Produits	Charges			Résultat brut	IBS 30%	Résultat net d'impôt	Cash flow
		Ch.décaissées	Amort	Total				
0	-	30.000	-	30.000				
1	100.000	75.000	6.000	81.000	19.000	5.700	13.300	19.300
2	120.000	90.000	6.000	96.000	24.000	7.200	16.800	22.800
3	140.000	105.000	6.000	111.000	29.000	8.700	20.300	26.300
4	160.000	120.000	6.000	126.000	34.000	10.200	23.800	29.800
5	80.000	135.000	6.000	141.000	39.000	11.700	27.300	33.300

Pour le projet B :

Pour l'année 1 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 60.000 + 9.000 = 69.000$ DA

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 100.000 - 69.000 = 31.000$ DA

L'IBS = le résultat brut $\times 30\%$
 $= 31.000 \times 30\% = 9.300$ DA

Le résultat net d'impôt = résultat brut - l'IBS
 $= 31.000 - 9.300 = 21.700$ DA

Le cash flow = résultat net d'impôt + l'amortissement
 $= 21.700 + 9.000 = 30.700$ DA

Pour l'année 2 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 72.000 + 9.000 = 81.000$ DA

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 120.000 - 81.000 = 39.000$ DA

L'IBS = le résultat brut $\times 30\%$
 $= 39.000 \times 30\% = 11.700$ DA

Le résultat net d'impôt = résultat brut - l'IBS
 $= 39.000 - 11.700 = 27.300$ DA

Le cash flow = résultat net d'impôt + l'amortissement
 $= 27.300 + 9.000 = 36.300$ DA

Pour l'année 3 :

Le total des charges = charges décaissées + l'amortissement
 $= 84.000 + 9.000 = 93.000$ DA

Le bénéfice brut ou résultat = produits - total des charges
 $= 140.000 - 93.000 = 47.000$ DA

$$\begin{aligned} \text{L'IBS} &= \text{le résultat brut} \times 30\% \\ &= 47.000 \times 30\% = 14.100 \text{ DA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Le résultat net d'impôt} &= \text{résultat brut} - \text{l'IBS} \\ &= 47.000 - 14.100 = 32.900 \text{ DA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Le cash flow} &= \text{résultat net d'impôt} + \text{l'amortissement} \\ &= 32.900 + 9.000 = 41.900 \text{ DA} \end{aligned}$$

De même pour les années 4 et 5 ; ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

Années	Produits	Charges			Résultat brut	IBS 30%	Résultat net d'impôt	Cash flow
		Ch. décaissements	Amort	Total				
0	-	45.000	-	45.000				
1	100.000	60.000	9.000	69.000	31.000	9.300	21.700	30.700
2	120.000	72.000	9.000	81.000	39.000	11.700	27.300	36.300
3	140.000	84.000	9.000	93.000	47.000	14.100	32.900	41.900
4	160.000	96.000	9.000	105.000	55.000	16.500	38.500	47.500
5	180.000	108.000	9.000	117.000	63.000	18.900	44.100	53.100

Calcul du cash-flow actualisé :

Pour le projet A :

Années	Flux	Flux actualisés
1	19.300 DA	$= 19.300 (1,1)^{-1} = 17.545,45 \text{ DA}$
2	22.800 DA	$= 22.800 (1,1)^{-2} = 18.842,97 \text{ DA}$
3	26.300 DA	$= 26.300 (1,1)^{-3} = 19.759,57 \text{ DA}$
4	29.800 DA	$= 29.800 (1,1)^{-4} = 20.353,80 \text{ DA}$
5	33.300 DA	$= 33.300 (1,1)^{-5} = 20.676,68 \text{ DA}$

$$\begin{aligned} \text{La VAN} &= \text{somme des flux actualisés} - \text{dépense initiale} \\ &= (17.545,45 + 18.842,97 + 19.759,57 + 20.353,80 + 20.676,68) - 30.000 \\ &= 97.178,47 - 30.000 = 67.178,47 \text{ DA} \end{aligned}$$

Pour le projet B :

Années	Flux	Flux actualisés
1	30.700 DA	$= 30.700 (1,1)^{-1} = 27.909,09 \text{ DA}$
2	36.300 DA	$= 36.300 (1,1)^{-2} = 30.000 \text{ DA}$
3	41.900 DA	$= 41.900 (1,1)^{-3} = 31.480,09 \text{ DA}$
4	47.500 DA	$= 47.500 (1,1)^{-4} = 32.443,13 \text{ DA}$
5	53.100 DA	$= 53.100 (1,1)^{-5} = 32.970,92 \text{ DA}$

De même :

$$\begin{aligned}\text{La VAN} &= \text{somme des flux actualisés} - \text{dépense initiale} \\ &= (27.909,09 + 30.000 + 31.480,09 + 32.443,13 + 32.970,92) \\ &\quad - 45.000 = 109.803,23 \text{ DA}\end{aligned}$$

Elle est supérieure à la VAN du projet A.

Selon la VAN ; le projet B est plus rentable.

Et les deux projets présentent le même délai de récupération (un an et quelques mois).

Exercice N° 2 :

1- Calcul des amortissements :

L'amortissement annuel = la dépense initiale/durée de vie du projet.

Pour le projet A ; l'amortissement = $400.000/5 = 80.000$ DA

Pour le projet B ; l'amortissement = $350.000/5 = 70.000$ DA

2-Calcul des capacités d'autofinancement :

Pour le projet A :

Années	Produits	Charges			Résultat brut	IBS 30%	Résultat net d'impôt	Cash flow
		Ch.décaissées	Amort	Total				
0	-	400.000	-	400.000				
1	250.000	100.000	80.000	180.000	70.000	21.000	49.000	129.000
2	350.000	200.000	80.000	280.000	70.000	21.000	49.000	129.000
3	270.000	90.000	80.000	170.000	100.000	30.000	70.000	150.000
4	400.000	30.000	80.000	380.000	20.000	6.000	14.000	94.000
5	200.000	50.000	80.000	130.000	70.000	21.000	49.000	129.000

Pour projet B :

Années	Produits	Charges			Résultat brut	IBS 30%	Résultat net d'impôt	Cash-flow
		Ch. décaissées	Amort	Total				
0	-	350.000	-	350.000				
1	245.000	98.000	70.000	168.000	77.000	23.100	53.900	123.900
2	195.000	100.000	70.000	170.000	25.000	7.500	17.500	87.500
3	200.000	110.000	70.000	180.000	20.000	6.000	14.000	84.000
4	250.000	130.000	70.000	200.000	50.000	15.000	35.000	105.000
5	390.000	210.000	70.000	280.000	110.000	33.000	77.000	147.000

Calcul des cash flow actualisés :

Pour le projet A :

Années	Flux	Flux actualisés
1	129.000 DA	$= 129.000 (1,1)^{-1} = 117.272,72$ DA
2	129.000 DA	$= 129.000 (1,1)^{-2} = 106.611,57$ DA
3	150.000DA	$= 150.000 (1,1)^{-3} = 112.697,22$ DA
4	94.000 DA	$= 94.000 (1,1)^{-4} = 64.203,26$ DA
5	129.000 DA	$= 129.000 (1,1)^{-5} = 80.098,85$ DA

Pour le projet B :

Années	Flux	Flux actualisés
1	123.900 DA	$= 123.900 (1,1)^{-1} = 112.636,36$ DA
2	87.500 DA	$= 87.500 (1,1)^{-2} = 72.314,05$ DA
3	84.000DA	$= 84.000 (1,1)^{-3} = 63.110,44$ DA
4	105.000 DA	$= 105.000 (1,1)^{-4} = 71.716,41$ DA
5	147.000 DA	$= 147.000 (1,1)^{-5} = 91.275,43$ DA

La VAN = somme des flux actualisés - dépense initiale

Pour le projet A : on trouve VAN = 80.883,62 DA

Pour le projet B : on trouve VAN = 60.653,26 DA ; le projet A est donc le plus rentable.

Exercice N° 3 :

Le calcul des capacités d'autofinancement est résumé dans le tableau suivant :

Année s	Produits	Charges			Résultat brut	Résultat net d'impôt	Capacité d'autofinancem ent
		Ch. décaissées	Amort	Total			
1	170.000	155.000	20.000	175.000	-5.000	-2.500	17.500
2	194.000	165.000	20.000	185.000	9.000	4.500	24.500
3	228.000	185.000	20.000	205.000	23.000	11.500	31.500
4	267.000	210.000	20.000	230.000	37.000	18.500	38.500
5	316.000	245.000	20.000	265.000	51.000	25.500	45.500

Exercice N° 4 :

Calcul de la VAN pour le projet A :

$$\left[70.000(1,1)^{-1} + 72.000(1,1)^{-2} + 76.000(1,1)^{-3} + 71.000(1,1)^{-4} + 68.000(1,1)^{-5} + 5.000(1,1)^{-5} \right] - 250.000 = 24.061,6 \text{ DA}$$

Calcul de la VAN pour le projet B :

$$\left[30.000(1,1)^{-1} + 40.000(1,1)^{-2} + 70.000(1,1)^{-3} + 90.000(1,1)^{-4} + 80.000(1,1)^{-5} \right] - 200.000 = 24.067,53 \text{ DA}$$

Calcul de la VAN pour le projet C :

$$\left[38.000(1,1)^{-1} + 42.000(1,1)^{-2} + 81.000(1,1)^{-3} + 84.000(1,1)^{-4} + 69.000(1,1)^{-5} \right] - 230.000 = 329,38 \text{ DA}$$

Le projet B est le plus rentable car il a la plus grande VAN.